

BUTLLETÍ

DE LA SOCIETAT CATALANA
DE MATEMÀTIQUES
Institut d'Estudis Catalans

í n d e x

- ☐ *Anna Cima*
Punts d'equilibri globalment atractors 121
- ☐ *Esther Ibáñez-Marcelo*
Introducció a l'anàlisi topològica de dades i aplicacions 153
- ☐ *Xavier Tolsa*
Rectificabilitat, funcions quadrades i la conjectura ε^2 de Carleson 181
- ☐ English summaries 199



Volum 36 • Número 2 • Any 2021



Institut
d'Estudis
Catalans

BUTLLETÍ

DE LA SOCIETAT CATALANA

DE MATEMÀTIQUES

Institut d'Estudis Catalans

Volum 36 • Número 2 • Desembre 2021

BARCELONA

2021

© dels autors dels articles

Editat per la Societat Catalana de Matemàtiques
filial de l'Institut d'Estudis Catalans
Carrer del Carme, 47
08001 Barcelona

Text revisat lingüísticament
per la Unitat d'Edició del Servei Editorial de l'IEC

Imprès a Ediciones Gráficas Rey, SL

ISSN: 0214-316-X
Dipòsit Legal: B 19272-1987



Els continguts del BUTLLETÍ DE LA SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES estan subjectes —llevat que s'indiqui el contrari en el text, en les fotografies o en altres il·lustracions— a una llicència Reconeixement - No comercial - Sense obres derivades 3.0 Espanya de Creative Commons, el text complet de la qual es pot consultar a <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/deed.ca>. Així, doncs, s'autoritza el públic en general a reproduir, distribuir i comunicar l'obra sempre que se'n reconegui l'autoria i l'entitat que la publica i no se'n faci un ús comercial ni cap obra derivada..

Índex

ANNA CIMA	
Punts d'equilibri globalment atractors.....	121
ESTHER IBÁÑEZ-MARCELO	
Introducció a l'anàlisi topològica de dades i aplicacions.....	153
XAVIER TOLSA	
Rectificabilitat, funcions quadrades i la conjectura ε^2 de Carleson.....	181
English summaries.....	199

Punts d'equilibri globalment atractors

ANNA CIMA

Resum: Un punt d'equilibri d'un sistema dinàmic continu o discret és un atractor global si l'òrbita de qualsevol punt tendeix a aquest punt d'equilibri quan el temps tendeix a infinit. En aquest article tractem el problema de donar condicions suficients perquè un punt d'equilibri d'un sistema dinàmic sigui un atractor global. En particular, ens centrem en els problemes continu i discret de Markus-Yamabe i en les condicions de LaSalle. Obtenim algunes respostes afirmatives a l'existència d'atractor global i trobem diversos exemples que no la presenten. Al final explicitem un cas en què el problema no està tancat. Els resultats que es presenten s'han obtingut en col·laboració amb Armengol Gasull i Francesc Mañosas, i estan extrets dels articles comuns que se citen a la bibliografia.

Paraules clau: sistemes dinàmics continus i discrets, atractor global, conjectura de Markus-Yamabe, conjectura jacobiana, teorema de linealització.

Classificació MSC2010: 35A24, 37Cxx.

1 Introducció

Sigui $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació de classe C^1 i considerem el sistema d'equacions diferencials associat

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Suposem que $\mathbf{p}$ és un punt d'equilibri de (1), és a dir, $F(\mathbf{p}) = 0$. Es diu que $\mathbf{p}$ és un *atractor global* del sistema dinàmic induït per (1) si per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(t, \mathbf{x})$ tendeix a $\mathbf{p}$ quan t tendeix a infinit, on $\varphi(t, \mathbf{x})$ és la solució de (1) tal que $\varphi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

L'existència d'un atractor global implica que la dinàmica generada per F és de les més simples possibles. I donar condicions perquè F tingui un equilibri que sigui un atractor global té moltíssimes aplicacions: en el camp de l'economia (vegeu [15, 2, 19]), en la dinàmica de poblacions, en models epidemiològics (vegeu [30, 22, 34]), etc.

El 1960 L. Markus i H. Yamabe van posar la conjectura següent (vegeu [28]):

CMY(n). *Sigui F una aplicació de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ tal que, per a qualsevol $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, la matriu jacobiana de F a $\mathbf{x}$ té tots els valors propis amb part real negativa. Si $F(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$, aleshores $\mathbf{p}$ és un atractor global de $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$.*

Recordem que el teorema de linealització afirma que, si $F(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ i la matriu jacobiana de F a $\mathbf{p}$, $JF(\mathbf{p})$, té els seus valors propis amb part real negativa, aleshores $\mathbf{p}$ és un atractor local de $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$.

Abans que l'article de Markus i Yamabe es publicués, Hartman ja havia demostrat que per a n arbitrari, un punt d'equilibri $\mathbf{p}$ és un atractor global de $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ si la matriu $JF(\mathbf{x}) + JF(\mathbf{x})^t$ té tots els valors propis negatius per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; vegeu [21].

A l'article esmentat, Markus i Yamabe van demostrar que la conjectura era certa per a $n = 2$ en el cas que una de les components de F només depengués d'una variable.

És fàcil veure que si **CMY(n)** és certa, aleshores F ha de ser injectiva. Altrament existirien $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, amb $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ i $F(\mathbf{a}) = F(\mathbf{b})$. Si definim $G(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x} + \mathbf{a}) - F(\mathbf{a})$, tenim que $JG(\mathbf{x})$ també compleix les hipòtesis de la conjectura però té dos punts d'equilibri diferents, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, i, per tant, G no té un atractor global.

L'any 1963, C. Olech va provar que, en el cas pla, el resultat és cert si i només si F és injectiva (vegeu [31]). I no va ser fins vint-i-cinc anys després que ell mateix, juntament amb G. Meisters, va provar que el resultat era cert per a aplicacions polinomials planes ([29]).

Per tant, sorgia la pregunta de si el resultat era cert per a aplicacions polinomials en qualsevol dimensió. De seguida es va relacionar aquesta conjectura amb l'emblemàtica conjectura jacobiana. Ho van fer Fournier i Martelli. Recordem la conjectura jacobiana.

CJ(n). *Sigui F una aplicació polinomial de $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{C}^n$ tal que el determinant de la matriu jacobiana de F en $\mathbf{x}$ és una constant diferent de zero per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. Aleshores F és bijectiva.*

Per veure la seva relació amb **CMY(n)** G. Fournier i M. Martelli van usar l'anomenat *teorema de reducció*, provat el 1982 per diversos autors; vegeu, per exemple, [13]. Segons aquest teorema, per provar la conjectura jacobiana n'hi ha prou de considerar aplicacions polinomials de la forma $F = -I + H$, on H és homogènia de grau 3 amb JH nilpotent. I van enunciar el resultat següent:

*Si **CMY(n)** és certa per a tot $n \geq 2$ i per a totes les aplicacions polinomials de la forma $-I + H$ amb H de grau 3 i JH nilpotent, aleshores la conjectura jacobiana és certa.*

Efectivament, si la conjectura jacobiana no és certa, hi ha un $n \in \mathbb{N}$ i un camp $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ no injectiu de la forma $F = -I + H$. Aleshores, definint $\tilde{F}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ per a

$$\tilde{F} = (\operatorname{Re} F_1, \operatorname{Im} F_1, \dots, \operatorname{Re} F_n, \operatorname{Im} F_n),$$

tenim que $\tilde{F}$ té la mateixa estructura que F i, per tant, com que la part lineal de $\tilde{F}(\mathbf{x})$ és $-I$, obtenim que, per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$, la matriu $J\tilde{F}(\mathbf{x})$ té tots els valors

propis iguals a -1 ; és a dir, estem en les hipòtesis de **CMY**(n) i, per tant, tindriem un contraexemple de la conjectura de Markus-Yamabe.

Els especialistes en la conjectura jacobiana diuen, per experiència, que si una conjectura implica la jacobiana, aleshores, molt probablement, la primera és falsa. Per tant, valia la pena centrar-se en la cerca de contraexemples de la conjectura de Markus-Yamabe per al cas polinomial per a $n \geq 3$.

Per al cas de camps de classe C^1 , l'any 1995 R. Fessler [14], C. Gutiérrez [20] i també A. A. Glutsyuk [18] van demostrar, independentment, que el resultat era cert per a aplicacions planes de classe C^1 . Ho van fer usant el resultat de Meisters i Olech, és a dir, provant la injectivitat de F .

En dimensió més gran o igual que 4, l'any 1996 J. Bernat i J. Llibre van donar exemples d'aplicacions de classe C^1 que satisfan les hipòtesis i tenen una òrbita periòdica, contradictòria amb l'existència d'un atractor global [1].

Finalment, el 1997 A. Gasull, F. Mañosas i jo mateixa, en col·laboració amb els algebristes holandesos A. van den Essen i E. Hubbers vam donar exemples d'aplicacions polinomials a $\mathbb{R}^n$ per a $n \geq 3$ que satisfan les hipòtesis de **CMY**(n) i que tenen òrbites no acotades [4].

A la secció 2 d'aquest article explicaré la gènesi d'aquests contraexemples; a la secció 3 tractaré la versió discreta d'aquesta conjectura, mentre que a la secció 4 estudiaré altres problemes d'atracció global per a sistemes discrets i a la secció 5 continuaré aquest estudi per al cas que l'aplicació provingui d'una equació en diferències. Els resultats que presentaré s'han extret dels articles [5, 6, 7, 8] i [9].

2 Contraexemples polinomials a **CMY**(n) per a $n \geq 3$

DEFINICIÓ 1. Es diu que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és una *funció quasi-homogènia* amb pesos $w_1, w_2, \dots, w_n$ i *quasi-grau* d si

$$f(\lambda^{w_1}x_1, \lambda^{w_2}x_2, \dots, \lambda^{w_n}x_n) = \lambda^d f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2)$$

per a tot $\lambda > 0$ i per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Els pesos w_i són números reals diferents de zero; en particular, poden ser negatius.

OBSERVACIÓ. Notem que si f és una funció quasi-homogènia amb pesos $w_1, w_2, \dots, w_n$ i quasi-grau d , aleshores, per a tota constant $c \neq 0$, f és també una funció quasi-homogènia amb pesos $cw_1, cw_2, \dots, cw_n$ i quasi-grau cd .

Clarament, si f és una funció quasi-homogènia amb pesos $1, 1, \dots, 1$ i quasi-grau d , aleshores f és homogènia de grau d .

DEFINICIÓ 2. Es diu que $F = (F_1, F_2, \dots, F_n): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és un *camp quasi-homogeni* amb pesos $w_1, w_2, \dots, w_n$ i *quasi-grau* d si cada F_i és una funció quasi-homogènia amb pesos $w_1, w_2, \dots, w_n$ i quasi-grau $w_i + d - 1$. Es diu que F és un *camp quasi-homogeni lineal* si és un camp quasi-homogeni de quasi-grau 1.

A partir d'ara considerem camps quasi-homogenis lineals, és a dir, suposem que cada component F_i té quasi-grau w_i .

LEMA 3. *Si F un camp quasi-homogeni lineal amb pesos $w_1, w_2, \dots, w_n$ i considerem el sistema $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$. Aleshores F és invariant pel canvi $y_i = \lambda^{w_i} x_i$ per a $i = 1, \dots, n$.*

PROVA. Hem de mostrar que si les components de $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ són solució de $\dot{x}_i = F_i(\mathbf{x})$, per a $i = 1, \dots, n$, aleshores $\mathbf{y}(t) = (\lambda^{w_1} x_1, \lambda^{w_2} x_2, \dots, \lambda^{w_n} x_n)$ també és solució:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \lambda^{w_i} \dot{x}_i = \lambda^{w_i} F_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = \\ &= F_i(\lambda^{w_1} x_1(t), \lambda^{w_2} x_2(t), \dots, \lambda^{w_n} x_n(t)) = F_i(\mathbf{y}(t)). \end{aligned} \quad \square$$

DEFINICIÓ 4. Donats els pesos $w_1, w_2, \dots, w_n$, definim la *semirecta* que passa pel punt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ com

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} = \{(\lambda^{w_1} x_1, \lambda^{w_2} x_2, \dots, \lambda^{w_n} x_n) : \lambda \in \mathbb{R}^+\}.$$

La proposició següent generalitza un resultat ja conegut per als sistemes homogenis.

PROPOSICIÓ 5. *Si $w_i w_j > 0$ per a tot $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, aleshores el comportament de les òrbites prop de l'origen determina el retrat de fase global. En particular, si l'origen és un atractor local, aleshores és un atractor global.*

PROVA. Podem suposar que $w_i > 0$ per a tot $i = 1, 2, \dots, n$, de manera que l'origen estarà a la clausura de les semirectes. Suposem que coneixem les solucions de $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ en un entorn B de l'origen i sigui $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Aleshores, per a λ prou petita, el punt $\mathbf{z} = (\lambda^{w_1} x_1, \lambda^{w_2} x_2, \dots, \lambda^{w_n} x_n)$ estarà a B . Sigui $\mathbf{z}(t)$ la solució de $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ que passa per $\mathbf{z}$, és a dir, tal que $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}$. Pel lema 3, sabem que

$$\mathbf{x}(t) := \left(\left(\frac{1}{\lambda} \right)^{w_1} z_1(t), \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{w_2} z_2(t), \dots, \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{w_n} z_n(t) \right)$$

és també una solució. I és clar que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$.

D'altra banda, també és clar que si $\mathbf{z}(t)$ tendeix a l'origen quan t va a infinit, aleshores $\mathbf{x}(t)$ també tendeix a l'origen quan t va a infinit. $\square$

EXEMPLE. Considerem la família de sistemes següent:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = -y + ax^2z + bx^4 + cz^2, \\ \dot{z} = -z + dx^2. \end{cases}$$

Tots aquests sistemes són quasi-homogenis lineals amb pesos 1, 4, 2. Com que la part lineal al $(0, 0, 0)$ té el valor propi -1 amb multiplicitat 3, pel teorema de linealització el $(0, 0, 0)$ és un atractor local. Per la proposició anterior podem dir que el $(0, 0, 0)$ és un *atractor global*.

DEFINICIÓ 6. Sigui $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ i considerem un punt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Direm que la solució que passa per $\mathbf{x}$ és de tipus exponencial si

$$\mathbf{x}(t) = (x_1 e^{m_1 t}, x_2 e^{m_2 t}, \dots, x_n e^{m_n t})$$

per a certs $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{R}$.

PROPOSICIÓ 7. Sigui F un camp quasi-homogeni lineal amb pesos $w_1, w_2, \dots, w_n$ i sigui $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ la semirecta que passa per $\mathbf{x}$. Aleshores, $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ és invariant pel flux de $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ si i només si la solució que passa per $\mathbf{x}$ és del tipus $x_i(t) = x_i e^{m_i t}$, on $m_i = c w_i$ per a algun $c \in \mathbb{R}$.

PROVA. Sigui $\mathcal{L}_{\mathbf{x}} = \{(\lambda^{w_1} x_1, \lambda^{w_2} x_2, \dots, \lambda^{w_n} x_n) : \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ i considerem la parametrització $\lambda = e^t$, és a dir,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} = \{(e^{w_1 t} x_1, e^{w_2 t} x_2, \dots, e^{w_n t} x_n) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Si $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ és invariant pel flux, aleshores existeix $\mu(t)$ tal que

$$w_i e^{w_i t} x_i = \mu(t) F_i(e^{w_1 t} x_1, e^{w_2 t} x_2, \dots, e^{w_n t} x_n).$$

Degut a la quasi-homogeneïtat de F , aquesta darrera condició pot ser escrita com $w_i x_i = \mu(t) F_i(\mathbf{x})$. Per tant, $\mu(t) = \mu$ és independent de t ; és a dir,

$$w_i x_i = \mu F_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Si $\mu = 0$, aleshores $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Com que l'origen és un punt crític de $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$, la solució també pot ser considerada de tipus exponencial.

Si $\mu \neq 0$, considerem $x_i(t) := x_i e^{\frac{w_i}{\mu} t}$. Aleshores, $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ és la solució que passa per $\mathbf{x}$ ja que

$$\dot{x}_i(t) = \frac{w_i}{\mu} x_i e^{\frac{w_i}{\mu} t} = F_i(\mathbf{x}) e^{\frac{w_i}{\mu} t} = F_i(x_1 e^{\frac{w_1}{\mu} t}, x_2 e^{\frac{w_2}{\mu} t}, \dots, x_n e^{\frac{w_n}{\mu} t}).$$

Aquesta darrera igualtat és deguda al fet que F és quasi-homogeni lineal amb pesos $w_1, w_2, \dots, w_n$, i ens diu que la solució que passa per $\mathbf{x}$ és de tipus exponencial.

Per provar el recíproc, considerem $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que la seva solució sigui $x_i(t) = x_i e^{m_i t}$ amb $m_i = c w_i$.

Si $c = 0$, aleshores $x_i(t) = x_i$ per a tot $t \in \mathbb{R}$ i tot $i = 1, 2, \dots, n$, i tots els punts de $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ són punts crítics de F .

Si $c \neq 0$, aleshores $\dot{x}_i(t) = F_i(\mathbf{x}(t))$ implica que

$$c w_i x_i e^{c w_i t} = F_i(x_1 e^{c w_1 t}, x_2 e^{c w_2 t}, \dots, x_n e^{c w_n t}) = e^{c w_i t} F_i(\mathbf{x}).$$

Per tant, $w_i x_i = (1/c) F_i(\mathbf{x})$. Aleshores, usant (3), veiem que $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ és invariant pel flux. $\square$

NOTA. Hi ha sistemes que tenen solucions de tipus exponencial i no són quasi-homogenis. Per exemple, el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + xy - x^2y^2 + 2x^2y, \\ \dot{y} = y + x^2 - x^3y - 2xy^2 \end{cases}$$

té la solució $x(t) = x_0 e^t$, $y(t) = (1/x_0)e^{-t}$ i no és quasi-homogeni.

De la proposició anterior es dedueix que (per a camps quasi-homogenis) les solucions exponencials passen per aquells punts $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfan el sistema d'equacions quasi-homogènies

$$c w_i x_i = F_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

És fàcil veure que, si F és quasi-homogeni, aleshores, o bé el conjunt de solucions d'aquest sistema es redueix a $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, o bé, si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ és solució, cada punt de $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ també és una solució. Posem-ne un exemple.

EXEMPLE.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = -y + x^2z, \\ \dot{z} = -z - x^2. \end{cases}$$

Aquest sistema és quasi-homogeni lineal amb pesos 1, 4, 2. Per trobar les solucions de tipus exponencial hem de resoldre el sistema (4), que, per a aquest sistema, s'escriu com

$$cx = -x, \quad 4cy = -y + x^2z, \quad 2cz = -z - x^2.$$

Les solucions són $\{(x, -\frac{x^4}{3}, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ i c ha de ser igual a -1 . Per a $x > 0$ (resp. $x < 0$) obtenim una òrbita del sistema que passa, per exemple, pel punt $(3, -27, 9)$ (resp. $(-3, -27, 9)$) i la solució que passa per $(3, -27, 9)$ (resp. per $(-3, -27, 9)$) és de tipus exponencial: $\mathbf{x}(t) = (3e^{-t}, -27e^{-4t}, 9e^{-2t})$ (resp. $\mathbf{x}(t) = (-3e^{-t}, -27e^{-4t}, 9e^{-2t})$).

Passem ja a construir els contraexemples. Comencem considerant camps del tipus $F = \lambda I + N$, on $\lambda \in \mathbb{R}$, I és la matriu identitat i N és nilpotent; és a dir, $JN(\mathbf{x})$ té tots els valors propis iguals a zero per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Aleshores, $JF(\mathbf{x})$ té tots els valors propis iguals a λ en tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Per tant, considerem $\lambda < 0$ per tal d'estar a les hipòtesis de la conjectura.

Suposem $n = 2$. Aleshores N nilpotent implica que

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \equiv 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial y} - \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial x} \equiv 0.$$

Per tant, existeix $H(x, y)$ de manera que $N_1(x, y) = -\frac{\partial H}{\partial y}$, $N_2(x, y) = \frac{\partial H}{\partial x}$ i el hessià de H és idènticament zero. D'un resultat clàssic de geometria diferencial

sabem que, per mitjà d'una transformació afí, podem escriure $H(u, v) = u + g(v)$ (vegeu [12] i [11]). Per tant, $H(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma + g(ax + by + c)$ ens proporciona una família d'exemples de Markus-Yamabe en dimensió 2:

$$F(x, y) = (\lambda x - bf(ax + by + c), \lambda y + af(ax + by + c)),$$

on $f = g'$, que la podem estendre a $\mathbb{R}^n$ per a $n \geq 3$:

$$F(\mathbf{x}) = (\lambda x_1 - b(x_3)f(u), \lambda x_2 + a(x_3)f(u), \lambda x_3, \dots, \lambda x_n)$$

amb $u = a(x_3)x_1 + b(x_3)x_2 + c(x_3)$ i a, b, c funcions arbitràries de classe C^1 .

Prenent $a(x_3) = ax_3^l, b(x_3) = bx_3^m, c(x_3) = 0$ i $f(u) = u^k$ ($a, b \in \mathbb{R}, k, l, m \in \mathbb{N}$), obtenim el teorema següent.

TEOREMA 8. *Considerem la família de camps de la forma*

$$F(\mathbf{x}) = (\lambda x_1 - bx_3^m(ax_1x_3^l + bx_2x_3^m)^k, \lambda x_2 + ax_3^l(ax_1x_3^l + bx_2x_3^m)^k, \lambda x_3, \dots, \lambda x_n).$$

Aleshores:

(i) *Per a tot $a, b, \lambda \in \mathbb{R}, k, l, m \in \mathbb{N}$, F és quasi-homogeni lineal amb pesos*

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (m + kl, l + km, 1 - k, \dots, 1 - k).$$

(ii) *Per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$ amb $\lambda < 0$, F satisfà les hipòtesis de la conjectura de Markus-Yamabe.*

(iii) *Per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$ amb $\lambda < 0$, $k \neq 0$ un número parell, $l, m \in \mathbb{N}$ amb $l \neq m$ i per a tot $a, b \in \mathbb{R}$, l'equació diferencial $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ té òrbites no acotades.*

PROVA. La demostració dels apartats (i) i (ii) consisteix en càlculs senzills, que ometem. Per veure (iii) considerem el sistema diferencial $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$. Aleshores les semirectes invariants queden determinades per les solucions del sistema format per les equacions $F_i(\mathbf{x}) = c\alpha_i x_i$, per a $i = 1, \dots, n$; és a dir, les solucions de

$$\begin{cases} \lambda x_1 - bx_3^m(ax_1x_3^l + bx_2x_3^m)^k = c(m + kl)x_1, \\ \lambda x_2 + ax_3^l(ax_1x_3^l + bx_2x_3^m)^k = c(l + km)x_2, \\ \lambda x_i = c(1 - k)x_i, \quad i = 3, 4, \dots, n, \end{cases}$$

que són

$$\begin{cases} c = \frac{\lambda}{1 - k} > 0, \\ x_1 = \frac{-bB}{aA} x_2 x_3^{m-l}, \\ x_2^{k-1} x_3^{l+km} = \frac{-B}{a} \left(\frac{A}{b\lambda(l - m)} \right)^k, \end{cases}$$

on $A = \lambda \frac{(1-k)-(m+kl)}{1-k}$ i $B = \lambda \frac{(1-k)-(l+km)}{1-k}$. Com que k és parell, el sistema anterior sempre té solucions reals (prenent $x_3 = 1$, per exemple). Siguin $\bar{x}_1, \bar{x}_2$

i $\tilde{x}_3$ unes solucions de les tres primeres equacions i prenem $\tilde{x}_i$ números reals arbitraris per a cada $i \geq 4$. Aleshores

$$\begin{cases} x_1(t) = \tilde{x}_1 e^{\frac{\lambda(m+kl)}{1-k}t}, \\ x_2(t) = \tilde{x}_2 e^{\frac{\lambda(l+km)}{1-k}t}, \\ x_i(t) = \tilde{x}_i e^{\lambda t}, \quad i = 3, 4, \dots, n, \end{cases}$$

és solució de $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$. I, com que $\lambda < 0$, $k > 1$ i $m + kl > 0$, tenim que $x_1(t), x_2(t) \rightarrow \infty$ quan $t \rightarrow \infty$. $\square$

De tots aquests sistemes, el més simple és:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_3(x_1 + x_2x_3)^2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - (x_1 + x_2x_3)^2, \\ \dot{x}_i = -x_i, \quad i = 3, 4, \dots, n. \end{cases}$$

És quasi-homogeni lineal amb pesos $(1, 2, -1, \dots, -1)$ i té òrbites no acotades, com ara

$$x_1(t) = 18e^t, \quad x_2(t) = -12e^{2t}, \quad x_3(t) = e^{-t}, \dots, x_n(t) = e^{-t}.$$

Per tant, l'origen no és un atractor global i prova que **CMY(n)** és falsa per a $n \geq 3$!

3 El problema discret de Markus-Yamabe

Considerem ara la dinàmica generada per les iteracions d'una aplicació $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 : donada una condició inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, definim la successió $\mathbf{x}^{(k+1)} = F(\mathbf{x}^{(k)})$. L'òrbita d'un punt $\mathbf{x}^{(0)}$ és la successió $\mathbf{x}^{(k)}$ i els punts fixos de F són els punts en què l'òrbita és constant. És fàcil veure que si per a una condició inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, la successió $\mathbf{x}^{(k)}$ és convergent, aleshores el límit és un punt fix de F . Un punt fix és un atractor local si té un entorn V tal que totes les òrbites que comencen a V tendeixen al punt fix. I és un atractor global quan V és tot l'espai. En el cas discret, també tenim un teorema de linealització: si $F(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ i la matriu jacobiana de F a $\mathbf{p}$, $JF(\mathbf{p})$, té els seus valors propis de mòdul més petit que 1, aleshores $\mathbf{p}$ és un atractor local del sistema dinàmic discret generat per F . Per tant, és natural fer-se la pregunta següent:

PMYD(n). Si $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una aplicació de classe C^1 amb $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ tal que per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ la matriu jacobiana de F a $\mathbf{x}$ té els seus valors propis de mòdul més petit que 1, és cert que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ és un atractor global del sistema dinàmic discret generat per F ?

Per a $n = 1$, la resposta és trivialment afirmativa.

Per a $n = 2$, ja hi ha contraexemples. El professor W. Szlenk, el 1994, va proposar l'aplicació

$$F(x, y) = \left(-\frac{ky^3}{1+x^2+y^2}, \frac{kx^3}{1+x^2+y^2} \right).$$

Observem que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}, 0\right) \xrightarrow{F} \left(0, \frac{1}{\sqrt{k-1}}\right) \xrightarrow{F} \left(-\frac{1}{\sqrt{k-1}}, 0\right) \xrightarrow{F} \left(0, -\frac{1}{\sqrt{k-1}}\right) \xrightarrow{F} \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}, 0\right),$$

i que quan $k \in (1, \frac{2}{\sqrt{3}})$, aleshores $JF(\mathbf{x})$ té tots els valors propis de mòdul menor que 1 per a tot $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. La presència d'aquesta òrbita periòdica de període 4 és contradictòria amb l'existència d'un atractor global.

Per a $n = 3$, les aplicacions quasi-homogènies també ens proporcionen una resposta negativa a **PMYD(n)**:

$$\begin{cases} F_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1 + x_3(x_1 + x_2x_3)^2, \\ F_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_2 - (x_1 + x_2x_3)^2, \\ F_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_i, \quad i = 3, 4, \dots, n. \end{cases}$$

L'aplicació F és quasi-homogènia lineal amb pesos $(1, 2, -1, \dots, -1)$ i té la solució no acotada:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \left(\frac{147}{32} 2^k, \frac{-63}{32} 2^{2k}, \left(\frac{1}{2}\right)^k, 0, \dots, 0\right).$$

Un càlcul simple mostra que $F(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{x}^{(k+1)}$, és a dir, que $\mathbf{x}^{(k)}$ és solució, i és la solució que passa per $(\frac{147}{32}, \frac{-63}{32}, 1, 0, \dots, 0)$; vegeu [6].

Rest a, doncs, obert el cas polinomial quan $n = 2$. Ara veurem que en aquest cas la resposta és afirmativa.

TEOREMA 9. *Sigui $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicació polinomial amb tots els valors propis de $JF(\mathbf{x})$ amb mòdul més petit que 1 per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Aleshores, existeix un únic punt fix que és un atractor global del sistema dinàmic discret generat per F .*

Abans de demostrar el teorema necessitem dos resultats.

LEMA 10. *Sigui $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació polinomial tal que $JF(\mathbf{x})$ té tots els valors propis amb mòdul més petit que 1 per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Aleshores, el polinomi característic de $JF(\mathbf{x})$ és independent de $\mathbf{x}$.*

PROVA. Sigui $P_{\mathbf{x}}(\lambda)$ el polinomi característic de $JF(\mathbf{x})$ i siguin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les seves arrels. Aleshores,

$$P_{\mathbf{x}}(\lambda) = \lambda^n - t_1\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n t_n,$$

on

$$t_j = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_j=1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_j}}^n \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_j}.$$

Com que $|\lambda_i| < 1$ per a tot $i = 1, 2, \dots, n$, per la desigualtat triangular tenim que $|t_j| < k_j$, on

$$k_j := \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_j=1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_j}}^n 1,$$

per a tot $j = 1, 2, \dots, n$. D'altra banda, com que les components de F són polinomials i podem descriure cada t_j com la suma de tots els menors d'ordre j que tenen la seva diagonal sobre la diagonal principal de $JF(\mathbf{x})$, podem concloure que t_j és un polinomi en $\mathbf{x}$ per a cada $j = 1, 2, \dots, n$. Com que els únics polinomis fitats són les constants, tenim que el polinomi característic no depèn de $\mathbf{x}$. $\square$

L'altre resultat que necessitem és per a aplicacions triangulars.

DEFINICIÓ 11. Una aplicació $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és *triangular* si

$$F(\mathbf{x}) = (F_1(x_1), F_2(x_1, x_2), \dots, F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Resulta que la pregunta **PMYD(n)** té una resposta afirmativa per a tota F triangular de classe C^1 i en qualsevol dimensió.

TEOREMA 12. *Sigui $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació triangular de classe C^1 tal que $JF(\mathbf{x})$ té tots els valors propis amb mòdul més petit que 1 per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Suposem que $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Aleshores, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ és un atractor global del sistema dinàmic discret generat per F .*

PROVA. Provarem, per inducció sobre m , l'afirmació següent: Considerem $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicació triangular de classe C^1 tal que:

$$\left| \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right| < 1, \quad \left| \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right| < 1, \dots, \left| \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \right| < 1 \quad \text{ i } \quad F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Fixem $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ i sigui $\mathbf{x}^{(k+1)} = F(\mathbf{x}^{(k)})$. Aleshores existeixen k_0 suficientment gran, $M \in \mathbb{R}^+$ i $K \in \mathbb{R}$, $0 < K < 1$, tals que

$$|x_i^{(k+k_0)}| \leq MK^k \quad \text{ per a tot } i = 1, 2, \dots, m.$$

Si provem aquest resultat, clarament, la successió d'iterats convergirà a $\mathbf{0}$ per a tota condició inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.

La demostració per al cas $m = 1$ és molt senzilla. Pel teorema del valor mitjà, per a cada $x \in \mathbb{R}$, tenim que $F(x) - F(0) = F'(\xi)x$, on ξ està entre 0 i x . Això ja implica que $|x^{(0)}| > |x^{(1)}| > |x^{(2)}| > \dots$. Si diem que $K = \max\{|F'(x)| : -|x^{(0)}| \leq x \leq |x^{(0)}|\}$ i $M = |x^{(0)}|$, tenim que $0 < K < 1$, per hipòtesi, i

$$|x^{(1)}| \leq K|x^{(0)}| = MK, \quad |x^{(2)}| \leq K|x^{(1)}| \leq MK^2, \dots, |x^{(k)}| \leq MK^k.$$

Suposem ara que l'afirmació és certa per a tot $m < s$ i provem-ho per a $m = s$.

Fixem $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^{s-1}$. Aplicant la hipòtesi d'inducció, tenim que existeixen k_0 , M i K tals que

$$|x_i^{(k+k_0)}| \leq MK^k \text{ per a cada } i = 1, 2, \dots, s-1 \text{ i per a tot } k \in \mathbb{N}.$$

No és restrictiu canviar $\mathbf{x}^{(0)}$ per $\mathbf{x}^{(k_0)}$ i suposar que

$$|x_i^{(k)}| \leq MK^k \text{ per a cada } i = 1, 2, \dots, s-1 \text{ i per a tot } k \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Considerem

$$\begin{aligned} x_s^{(k)} &= F_s(\mathbf{x}^{(k-1)}) = F_s(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_s^{(k-1)}) = \\ &= \int_0^{x_s^{(k-1)}} \frac{\partial F_s}{\partial x_s}(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_{s-1}^{(k-1)}, t) dt + \\ &\quad + \int_0^{x_{s-1}^{(k-1)}} \frac{\partial F_s}{\partial x_{s-1}}(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_{s-2}^{(k-1)}, t, 0) dt + \dots \\ &\quad + \int_0^{x_1^{(k-1)}} \frac{\partial F_s}{\partial x_1}(t, 0, \dots, 0) dt. \end{aligned}$$

Per la hipòtesi d'inducció, sabem que, per a tot $k \in \mathbb{N}$, per a tot $i < s$ i per a tot $t \in [0, x_i^{(k)}]$, els vectors $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, t, 0, \dots, 0)$ pertanyen a un compacte L . Per a cada $i < s$, sigui M_i el màxim valor que pren $\frac{\partial F_s}{\partial x_i}$ a L i anomenem $\bar{M} = \max\{M_1, M_2, \dots, M_{s-1}\}$.

Usant que si $a < b$, aleshores $|\int_a^b f(t) dt| \leq \int_a^b |f(t)| dt$, podem escriure

$$|x_s^{(k)}| \leq |x_s^{(k-1)}| + \bar{M}(|x_{s-1}^{(k-1)}| + |x_{s-2}^{(k-1)}| + \dots + |x_1^{(k-1)}|). \quad (6)$$

A partir de les equacions (5) i (6) obtenim:

$$|x_s^{(k)}| \leq |x_s^{(k-1)}| + (s-1)M\bar{M}K^{k-1}. \quad (7)$$

Anomenant $C = (s-1)M\bar{M}$, i treballant aquesta desigualtat inductivament, tenim que

$$|x_s^{(k)}| \leq |x_s^{(0)}| + C(K^{s-1} + K^{s-2} + \dots + 1) \leq |x_s^{(0)}| + \frac{C}{1-K}.$$

Per tant, $x_s^{(k)}$ és una successió fitada. Com que el mateix és cert per a $x_i^{(k)}$, per a $i = 1, 2, \dots, s-1$, existeix $R > 0$ tal que $|x_i^{(k)}| \leq R$ per a $i = 1, 2, \dots, s$. I podem definir

$$D = \max \left\{ \left| \frac{\partial F_s}{\partial x_s}(y_1, y_2, \dots, y_s) \right| : |y_i| \leq R, i = 1, 2, \dots, s \right\}$$

i assegurar que D és estrictament més petit que 1. Això implica que la desigualtat (6) pot ser substituïda per

$$|x_s^{(k)}| \leq D|x_s^{(k-1)}| + \tilde{M}(|x_{s-1}^{(k-1)}| + |x_{s-2}^{(k-1)}| + \dots + |x_1^{(k-1)}|)$$

i la desigualtat (7), per

$$|x_s^{(k)}| \leq D|x_s^{(k-1)}| + CK^{k-1}. \quad (8)$$

Seguint aquesta desigualtat recurrentment, tenim que

$$\begin{aligned} |x_s^{(k)}| &\leq D(D|x_s^{(k-2)}| + K^{k-2}C) + K^{k-1}C \leq \\ &\vdots \\ &\leq D^k|x_s^{(0)}| + C(K^{k-1} + DK^{k-2} + \dots + D^{k-1}) \leq \\ &\leq D^k|x_s^{(0)}| + kC(\max(K, D))^{k-1} \leq \\ &\leq \max(K, D)^k \left[|x_s^{(0)}| + \frac{kC}{\max(K, D)} \right] \leq \\ &\leq \hat{M}(k)\hat{K}^k, \end{aligned}$$

on hem anomenat $\hat{K} = \max(K, D)$, que clarament compleix $0 < \hat{K} < 1$ i $\hat{M}(k) = |x_s^{(0)}| + \frac{kC}{\max(K, D)}$. Observem que $\hat{M}(k)$ és lineal en k .

Ara considerem $0 < \bar{K} < \hat{K}$, de manera que $\frac{\hat{K}}{\bar{K}} < 1$. Com que l'exponencial domina els polinomis, tenim que $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\hat{K}}{\bar{K}}\right)^k \hat{M}(k) = 0$ i, per tant, $\left(\frac{\hat{K}}{\bar{K}}\right)^k \hat{M}(k) \leq \bar{M}$.

Ajuntant tot el que hem provat:

$$|x_s^{(k)}| \leq \hat{M}(k)\hat{K}^k = \left(\frac{\hat{K}}{\bar{K}}\right)^k \hat{M}(k)\bar{K}^k \leq \bar{M}\bar{K}^k,$$

i hem acabat la inducció.

Així, per a tot $i = 1, 2, \dots, n$, tenim que $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_i^{(k)}| = 0$ i l'origen és un atractor global per al sistema dinàmic discret generat per l'aplicació triangular. $\square$

Passem ja a demostrar el teorema 9. Usarem uns resultats clàssics de F. Dillen [11] (1991) i de K. Jörgens [23] (1954) sobre l'estructura dels polinomis amb hessià constant.

PROVA DEL TEOREMA 9. Sigui $F = (P, Q)$. Aleshores, pel lema 10,

$$t_1 = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{i} \quad t_2 = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

són constants.

Considerem $\bar{F} = F - (t_1/2)I := (\bar{P}, \bar{Q})$. Aleshores

$$\bar{t}_1 = 0 \quad \text{i} \quad \bar{t}_2 = t_2 - \frac{t_1^2}{4}.$$

Per tant, existeix un polinomi $H(x, y)$ tal que $\bar{P} = -\partial H/\partial y$ i $\bar{Q} = \partial H/\partial x$, i el hessià de H és la constant $\bar{t}_2$. Si $\bar{t}_2 \neq 0$, aplicant els resultats de l'article [11] sabem que via un canvi complex afí, $x = \alpha u + \beta v + \gamma$, $y = au + bv + c$, H es pot escriure

$$H(\phi(u, v)) = \sqrt{-\bar{t}_2}uv + h(u), \text{ on } h \text{ és un polinomi en la variable } u.$$

Suposem que $\bar{t}_2 < 0$. Mirant la prova a [11] veiem que el canvi afí es pot prendre a coeficients reals i, per tant, $H(\phi(u, v)) \in \mathbb{R}$. Sigui doncs,

$$\phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ c \end{pmatrix}, \text{ amb } A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ a & b \end{pmatrix}$$

i $\det(A) = b\alpha - a\beta$, on tots els coeficients són reals. El canvi invers és

$$\phi^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} \gamma \\ c \end{pmatrix}.$$

La informació que tenim és que $H(\phi(u, v)) = \sqrt{-\bar{t}_2}uv + h(u)$ i que $\bar{P} = -\partial H/\partial y$ i $\bar{Q} = \partial H/\partial x$. Aplicant la regla de la cadena a $H(\phi(u, v))$, tenim:

$$\frac{\partial}{\partial u} H(\phi(u, v)) = \alpha(\bar{Q} \circ \phi) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - a(\bar{P} \circ \phi) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sqrt{-\bar{t}_2}v + h'(u),$$

$$\frac{\partial}{\partial v} H(\phi(u, v)) = \beta(\bar{Q} \circ \phi) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - b(\bar{P} \circ \phi) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sqrt{-\bar{t}_2}u,$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} -a & \alpha \\ -b & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{P} \circ \phi \\ \bar{Q} \circ \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{-\bar{t}_2}v + h'(u) \\ \sqrt{-\bar{t}_2}u \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$\begin{pmatrix} \bar{P} \circ \phi \\ \bar{Q} \circ \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{-\bar{t}_2}v + h'(u) \\ \sqrt{-\bar{t}_2}u \end{pmatrix}.$$

Ara usarem aquesta igualtat per a calcular la conjugada de $\bar{F}$ via ϕ .

$$\begin{aligned}
 (\phi^{-1} \circ \bar{F} \circ \phi) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \phi^{-1} \circ \begin{pmatrix} \bar{P} \circ \phi \\ \bar{Q} \circ \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{\det(A)} A^{-1} \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{-\bar{t}_2} v + h'(u) \\ \sqrt{-\bar{t}_2} u \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} y \\ c \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{-\bar{t}_2} v + h'(u) \\ \sqrt{-\bar{t}_2} u \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} y \\ c \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} -\sqrt{-\bar{t}_2} u \\ \sqrt{-\bar{t}_2} v + h'(u) \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} y \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 u + c_2 \\ c_3 v + p(u) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

on c_1 , c_2 i c_3 són reals i p és un polinomi en u . Veiem, doncs, que $\bar{F}$ és conjugada via ϕ d'aquesta aplicació triangular tan senzilla. Ara veurem com serà la conjugada de F via ϕ :

$$\begin{aligned}
 (\phi^{-1} \circ F \circ \phi) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \phi^{-1} \left(\bar{F} + \frac{t_1}{2} I \right) \left(\phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = \phi^{-1} \left(\bar{F} \circ \phi + \frac{t_1}{2} \phi \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \\
 &= A^{-1} \left(\bar{F} \circ \phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) + \frac{t_1}{2} A^{-1} \phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} y \\ c \end{pmatrix} = \\
 &= (\phi^{-1} \circ \bar{F} \circ \phi) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{t_1}{2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{t_1}{2} A^{-1} \begin{pmatrix} y \\ c \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} c_1 u + c_2 \\ c_3 v + p(u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t_1}{2} u \\ \frac{t_1}{2} v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 u + k_2 \\ k_3 v + q(u) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

on k_1 , k_2 i k_3 són reals i q és un polinomi en u . Per tant, F també és conjugada d'aquesta senzilla aplicació triangular $\tilde{F}(u, v) := (k_1 u + k_2, k_3 v + q(u))$. Com que són conjugades, tenen els mateixos valors propis, així que el jacobí de $\tilde{F}$ té tots els valors propis amb mòdul més petit que 1. Veiem, també, que $\tilde{F}$ té un únic punt fix. Fent una translació que porti aquest punt fix al $(0, 0)$ i aplicant el teorema 12, tenim que l'origen és un atractor global per a F .

Suposem ara que $\bar{t}_2 = 0$. De la demostració de Dillen se segueix que, via un canvi afí de coordenades, H es pot escriure com $kv + h(u)$, on h és un polinomi en u . Resseguint els mateixos passos que en el cas $\bar{t}_2 < 0$, veiem que $\bar{F}$ és conjugada d'una aplicació del tipus $(k_1 u + k_2, k_3 v + p(u))$, on p és un polinomi en u . I el mateix per a F . I la mateixa conclusió.

Si $\bar{t}_2 > 0$, l'article de Jörgens ens diu que, per força, $H(x, y)$ és un polinomi quadràtic. Per tant, $\bar{F}$ i F són aplicacions polinòmiques de grau 1, per a les quals és conegut que el fet de tenir valors propis més petits que 1 implica que totes les òrbites tendeixen a l'origen. $\square$

Es podria pensar que la hipòtesi $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ no és essencial quan considerem el problema discret de Markus-Yamabe. De seguida, però, ens adonem que l'hem de tenir en compte. Per exemple, si considerem el sistema dinàmic generat per

$$F(x) = \log(1 + e^x),$$

és clar que $|DF(x)| = |F'(x)| < 1$ però no té cap punt fix.

Efectivament, a [6] provem una interessant relació entre l'existència de punt fix per a aplicacions polinomials que satisfan les hipòtesis de Markus-Yamabe i l'emblemàtica conjectura jacobiana. Expliquem ara aquest resultat.

Considerem el problema següent:

LA CONJECTURA DEL PUNT FIX. *Sigui $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació polinomial tal que, per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, la matriu jacobiana de F a $\mathbf{x}$ té tots els valors propis de mòdul més petit que 1. Aleshores, F té un únic punt fix.*

Considerant les parts real i imaginària de les components d'una aplicació polinomial $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ i usant arguments estàndard d'àlgebra lineal, és fàcil provar que aquesta conjectura pot ser formulada en la forma equivalent següent:

LA CONJECTURA DEL PUNT FIX. *Sigui $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ una aplicació polinomial tal que, per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, la matriu jacobiana de F a $\mathbf{x}$ té tots els valor propis de mòdul més petit que 1. Aleshores, F té un únic punt fix.*

TEOREMA 13 ([6]). *La conjectura jacobiana és equivalent a la conjectura del punt fix.*

PROVA. Suposem que la conjectura jacobiana és certa i prenem F que satisfaci les hipòtesis de la conjectura del punt fix. Sigui $G(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$. Aleshores, els valors propis de $DG(\mathbf{x})$ són els valors propis de $DF(\mathbf{x})$ menys 1. A partir dels resultats obtinguts anteriorment, sabem que $\det DG(\mathbf{x})$ és constant. A més, per hipòtesi, sabem que aquesta constant no és zero. Per tant, G és invertible i existeix un únic zero de G , que és l'únic punt fix de F .

Ara suposem que la conjectura jacobiana no és certa. Pel teorema de reducció, podem afirmar que existeix $n \in \mathbb{N}$ i $G: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ polinomial i no invertible de la forma

$$G(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + H(\mathbf{x}),$$

on $DH(\mathbf{x})$ és una matriu nilpotent per a cada $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. Ara, sigui $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}G(\mathbf{x})$ i $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ amb $g(\mathbf{y}) = g(\mathbf{z}) = \mathbf{p}$. Definint $h(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{p} - g(\mathbf{x})$, tenim que $h(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ i $h(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$. D'altra banda, com que $DH(\mathbf{x})$ és una matriu nilpotent per a cada $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, tots els seus valors propis són zero. De la definició de $h(\mathbf{x})$ obtenim

$$Dh(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - Dg(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \left(\frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}DH(\mathbf{x}) \right) = \frac{1}{2}\mathbf{x} - \frac{1}{2}DH(\mathbf{x}),$$

que implica que tots els valors propis de $Dh(\mathbf{x})$ són $1/2$. Per tant, $h(\mathbf{x})$ està sota les hipòtesis de la conjectura del punt fix i té dos punts fixos diferents. $\square$

4 Els problemes de LaSalle

En aquesta secció exposaré els resultats obtinguts a [7].

Sigui $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació de classe C^1 i, com a la secció anterior, considerem el sistema dinàmic discret generat per F .

Donada una matriu $A = (a_{ij})$ real $n \times n$, definirem $|A| = (|a_{ij}|)$. Si $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, aleshores podem escriure $F(\mathbf{x})$ com $F(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})\mathbf{x}$, on $A(\mathbf{x})$ és una matriu de funcions $n \times n$. LaSalle, al seu llibre *The Stability of Dynamical Systems* (1976) (vegeu [25]), va donar possibles condicions suficients per a tenir un atractor global, generalitzacions del cas $n = 1$. Concretament:

(A_1) $|\lambda| < 1$ per a cada λ valor propi de $A(\mathbf{x})$ i per a cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(A_2) $|\lambda| < 1$ per a cada λ valor propi de $|A(\mathbf{x})|$ i per a cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(B_1) $|\lambda| < 1$ per a cada λ valor propi de $JF(\mathbf{x})$ i per a cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(B_2) $|\lambda| < 1$ per a cada λ valor propi de $|JF(\mathbf{x})|$ i per a cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Tal com es pot observar, la condició (B_1) és la que hem considerat quan hem tractat l'anomenat *problema discret de Markus-Yamabe*. Va ser Meisters qui ens va fer saber d'aquest llibre després d'escriure l'article [6]. En aquesta secció, encarem l'estudi dels problemes (A_1), (A_2) i (B_2).

Veurem que hi ha aplicacions polinomials que satisfan les hipòtesis (A_1) o (A_2) tals que l'origen no és un atractor global (vegeu les proposicions 16 i 17). Quant a la condició (B_2), sí que obtenim un resultat afirmatiu per a tot $n \geq 2$ en el cas que F sigui polinomial. El problema resta obert per a aplicacions de classe C^1 que satisfan (B_2).

Per construir els exemples polinomials ens serà molt útil el lema següent, generalització del lema 10.

LEMA 14. *Sigui $A(\mathbf{x})$ una matriu amb entrades polinomials tal que el conjunt de tots els valors propis de $A(\mathbf{x})$ per a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ és un conjunt fitat. Aleshores, el polinomi característic de $A(\mathbf{x})$ és independent de $\mathbf{x}$.*

La prova es basa en el mateix: no hi ha polinomis fitats.

En el cas més simple, $n = 2$, podem considerar

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} C + p(x, y) & q(x, y) \\ r(x, y) & C - p(x, y) \end{pmatrix},$$

on $r(x, y)q(x, y) = D^2 - p^2(x, y)$ i C i D són constants. Aleshores, $t_1 = 2C$ i $t_2 = C^2 - D^2$. Per tant, els valors propis són $C \pm D$, que no depenen de (x, y) .

Per explicitar exemples que satisfan la condició (A_1) , prendrem $A(x, y)$ de la forma anterior amb la condició $|C \pm D| < 1$. Per exemple, podem prendre $C = D = 0$, $q(x, y) = 1$ i $r(x, y) = -p^2(x, y)$. Ara imposem que aquestes aplicacions $F(x, y) = A(x, y)(x, y)^T$ tinguin punts periòdics.

LEMA 15. *Si $F(x, y) = A(x, y)(x, y)^T$, on*

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} p(x, y) & 1 \\ -p^2(x, y) & -p(x, y) \end{pmatrix}.$$

Si $(x_0, y_0) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ i anomenem $p_n := p(x_n, y_n)$, on (x_n, y_n) és l'iterat n -èsim de (x_0, y_0) per F . Aleshores, (x_0, y_0) és un punt periòdic de període k de F si i només si

- (i) $y_k = -p_{k-1}x_0$,
- (ii) $(p_0 - p_{k-1})(p_1 - p_0)(p_2 - p_1) \cdots (p_{k-1} - p_{k-2}) = 1$.

PROVA. Iterant k vegades l'aplicació F , un càlcul simple dona

$$\begin{aligned} y_k &= -p_{k-1}x_k, \\ x_k &= (p_{k-1} - p_{k-2})(p_{k-2} - p_{k-3}) \cdots (p_2 - p_1)(p_1 - p_0)(p_0x_0 + y_0). \end{aligned}$$

Com que (x_0, y_0) té període k , $(x_k, y_k) = (x_0, y_0)$, i obtenim així les dues igualtats anunciades. $\square$

És clar a partir del lema anterior que no podem tenir punts periòdics de període 2, però sí que en podem tenir de període k , amb $k \geq 3$. Podem obtenir un exemple simple prenent $k=4$, amb $p_1 = p_3 = 1$ i $p_0 = p_2 = 0$. Començant a $(x_0, y_0) = (1, -1)$, tenim que $F(1, -1) = (-1, 0)$, $F(-1, 0) = (-1, 1)$, $F(-1, 1) = (1, 0)$, $F(1, 0) = (1, -1)$. Hem de trobar, doncs, un polinomi $p(x, y)$ tal que $p(1, -1) = p(-1, 1) = 0$ i $p(-1, 0) = p(1, 0) = 1$. El més senzill és $p(x, y) = x(x + y)$.

PROPOSICIÓ 16. *Per a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, sigui $F(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})\mathbf{x}$, on*

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_1x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -(x_1^2 + x_1x_2)^2 & -(x_1^2 + x_1x_2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, F satisfà la hipòtesi (A_1) i té punts periòdics de període 4. En particular, l'origen no és un atractor global.

PROVA. Com que el polinomi característic de $A(\mathbf{x})$ és $P(\lambda) = \lambda^n - t_1\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^nt_n$ i $t_i = 0$ per a tot $i = 1, 2, \dots, n$, tenim que $A(\mathbf{x})$ satisfà la hipòtesi (A_1) . I l'òrbita que comença a $(1, -1, 0, \dots, 0)$ és periòdica de període 4. $\square$

Pel que fa a la condició (A_2) , considerem $A(x, y)$ de la forma

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ r(x, y) & b \end{pmatrix},$$

on $a, b \in \mathbb{R}$ i $r(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$. La matriu $|A(x, y)|$ satisfà la condició (A_2) si $|a| < 1$ i $|b| < 1$. Podem veure que la hipèrbola $xy - 1 = 0$ és invariant per $F(x, y) = A(x, y)(x, y)^T$ (és a dir, que si un punt (x, y) del pla està sobre la hipèrbola $xy - 1 = 0$, aleshores la seva imatge també ho està) si i només si $ax^2r(x, \frac{1}{x}) = 1 - ab$. Per tant, si escollim $r(x, y) = \frac{1-ab}{a}xy^3$, aleshores l'origen no serà un atractor global de l'aplicació corresponent. Prenent $a = b = \frac{1}{2}$, escrivim la versió n -dimensional d'aquesta aplicació.

PROPOSICIÓ 17. *Segui $F(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})\mathbf{x}$, on*

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{3}{2}x_1x_2^3 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, F satisfà la condició (A_2) i la corba $\{(z, \frac{1}{z}, 0, \dots, 0), z \in \mathbb{R}\}$ és invariant per F . En particular, l'origen no és un atractor global del sistema dinàmic discret generat per les iteracions de F .

PROVA. Els valors propis de la matriu $|A(\mathbf{x})|$ són $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ i $\lambda_j = 0$ per a tot $j = 3, \dots, n$. Per tant, F satisfà la condició (A_2) . A més, $F(z, 1/z, 0, \dots, 0) = (z/2, 2/z, 0, \dots, 0)$, fet que prova el resultat. $\square$

Ara passem a donar respostes positives al problema de l'atracció global. Com dèiem al principi d'aquesta secció, si la condició (B_2) se satisfà i F és un polinomi, aleshores l'origen és un atractor global. Per a fer la prova, necessitem veure quina estructura tenen els polinomis que satisfan (B_2) . Ens calen algunes definicions. Per posar-ho en un marc més general, denotarem per $\mathbb{K}$ un dels cossos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Considerem $M = M(\mathbf{x})$ una matriu $n \times n$ amb coeficients a l'anell de polinomis $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$, on $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Un *menor diagonal* de M és un menor que té la diagonal inclosa en la diagonal de M . Si denotem per $a_i^j = a_i^j(\mathbf{x})$ l'element que és a la fila i i a la columna j de M , un *producte elemental de llargada k* és un element que s'escriu com

$$a_{\sigma(i_1)}^{i_1} a_{\sigma(i_2)}^{i_2} \dots a_{\sigma(i_k)}^{i_k},$$

on $i_1, i_2, \dots, i_k$ són k elements diferents de $I = \{1, 2, \dots, n\}$ i $\sigma \in S_k$, el grup simètric de k elements. Direm que M és *triangular per blocs* si existeix una partició $I_1, I_2, \dots, I_k$ de I tal que

$$a_i^j \begin{cases} = 0 & \text{si } i \in I_r, j \in I_s \text{ i } r < s, \\ \in \mathbb{K} & \text{si } i, j \in I_r \text{ per a algun } r. \end{cases}$$

Notem que després de reordenar els índexs, una matriu triangular per blocs és de la forma

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_1^{p_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p_1}^1 & \dots & b_{p_1}^{p_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \begin{pmatrix} b_{p_1+1}^{p_1+1} & \dots & b_{p_1+1}^{p_1+p_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p_1+p_2}^{p_1+1} & \dots & b_{p_1+p_2}^{p_1+p_2} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \begin{pmatrix} b_{n-p_k+1}^{n-p_k+1} & \dots & b_{n-p_k+1}^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n^{n-p_k+1} & \dots & b_n^n \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

on $b_i^j = a_{\sigma(i)}^{\sigma(j)}$ per a alguna permutació σ , i les entrades de les submatrius de la diagonal són elements de $\mathbb{K}$.

La proposició següent relaciona les nocions anteriors amb la condició (B_2) . De fet, el que fa és caracteritzar les aplicacions triangulars per blocs. I ens permetrà usar que, si $F(\mathbf{x})$ es pot escriure com $F(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})\mathbf{x}$ i satisfà la condició (B_2) , aleshores $A(\mathbf{x})$ és triangular per blocs. No en donarem la demostració, ja que és força feixuga; la trobareu a [7].

PROPOSICIÓ 18. *Segui $M = M(\mathbf{x})$ una matriu d'ordre m amb entrades a $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$, on $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$. Les condicions següents són equivalents:*

- (i) *Existeix un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que, per a cada $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^m$, tot valor propi $\lambda(\mathbf{x})$ de $|M(\mathbf{x})|$ compleix $|\lambda(\mathbf{x})| < \alpha$.*
- (ii) *Cada producte elemental de M pertany a $\mathbb{K}$.*
- (iii) *$\det N \in \mathbb{K}$ per a tot N menor diagonal de M .*
- (iv) *La matriu M és triangular per blocs.*
- (v) *El polinomi característic de $|M(\mathbf{x})|$ té tots els coeficients a $\mathbb{K}$.*
- (vi) *Els valors propis de $|M(\mathbf{x})|$ no depenen de $\mathbf{x}$.*

També necessitarem el lema següent que, essencialment, està provat a [16]. Recordem que el radi espectral d'una matriu quadrada A es defineix $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ és un valor propi de } A\}$.

LEMA 19. *Segui A una matriu quadrada d'ordre n . Aleshores*

$$\rho(A) \leq \rho(|A|).$$

PROVA. Seguint [16], direm que A és reductible si podem trobar una permutació que, en aplicar-la a les files i a les columnes de A , obtenim una matriu de la forma

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

on B i D són matrius quadrades. Si una matriu no és reductible, s'anomena *irreductible*. Per a matrius irreductibles, un resultat més fort que el que hem anunciat està provat a la secció 2 de [16]. Per tant, només hem de provar el lema per a matrius reductibles. Observem que el conjunt de valors propis de la matriu A és la unió dels conjunts de valors propis de les matrius B i D . Per tant, podem reduir l'estudi a matrius d'ordre més petit. Cadascuna de les noves matrius és reductible o irreductible. En el segon cas, ja acabem la prova. En el primer, continuem aquest procés fins que arribem a una matriu irreductible. $\square$

Ara ja tenim les eines a punt per a provar el teorema principal d'aquesta secció.

TEOREMA 20. *Sigui $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació polinomial que satisfà la condició (B_2) i tal que $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Aleshores, l'origen és un atractor global del sistema dinàmic discret generat per les iteracions de F .*

PROVA. Sigui F tal que tots els valors propis de $|JF(\mathbf{x})|$ tenen mòdul més petit que 1. Per la proposició 18, sabem que la matriu $JF(\mathbf{x})$ és triangular per blocs. A més, el lema 19 implica que té tots els valors propis de mòdul més petit que 1. Per tant, existeix una base de $\mathbb{R}^n$ tal que l'aplicació $F(\mathbf{x})$ es pot escriure com

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) = (F_1(x_1), F_2(x_1, x_2), \dots, F_{m-1}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}), F_m(x_1, x_2, \dots, x_m)) = \\ = (\Lambda_1 x_1, \Lambda_2 x_2 + t_2(x_1), \Lambda_3 x_3 + t_3(x_1, x_2), \dots, \\ \Lambda_{m-1} x_{m-1} + t_{m-1}(x_1, x_2, \dots, x_{m-2}), \Lambda_m x_m + t_m(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})), \end{aligned} \quad (9)$$

on cada $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^n$, Λ_i són matrius reals $n_i \times n_i$ i t_i són polinomis. A més, els valors propis de cada matriu Λ_i tenen mòdul més petit que 1. L'expressió anterior de $F(\mathbf{x})$ és el punt clau de la prova, que és similar a la del teorema 12.

Notem que podem descriure $\mathbb{R}^n$ com la suma directa de $\mathbb{R}^{n_i}$ per a $i = 1, 2, \dots, m$. D'altra banda, com que cada matriu Λ_i té radi espectral més petit que 1, és conegut que, a cada $\mathbb{R}^{n_i}$, podem considerar una norma $|\cdot|_i$ tal que

$$|\Lambda_i x_i|_i \leq d_i |x_i|_i, \quad (10)$$

amb $|d_i| < 1$. Definim $D = \max\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$. Aquestes normes indueixen una norma a l'espai total que anomenarem $|\cdot|$.

Fixem una condició inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ i demostrem que $|\mathbf{x}^{(k)}| = |F^k(\mathbf{x}^{(0)})|$ tendeix a zero quan k tendeix a infinit. Ho provarem per inducció sobre el nombre de components de $F(\mathbf{x})$. Demostrarem per inducció el resultat següent, que implica el teorema 20.

Existeixen $M > 0$ i $0 \leq K < 1$ tals que per a cada natural k , $|x_i^{(k)}| \leq MK^k$ per a cada $i = 1, 2, \dots, s$.

Per a $s = 1$, la prova és immediata gràcies a (10). Suposem, doncs, que el resultat és cert per a $i < s$ i provem-lo per a $i = s$. Per la hipòtesi d'inducció sabem que, per a tot k , per a tot $i < s$ i per a tot $t \in [0, 1]$, els vectors $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, tx_i^{(k)}, 0, \dots, 0)$ estan continguts en un compacte L . Considerem

$$\begin{aligned}
 |x_s^{(k)}| &= |F_s(\mathbf{x}^{(k-1)})| = \\
 &= \left| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} F_s(x_1^{(k-1)}, \dots, tx_s^{(k-1)}) dt + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} F_s(x_1^{(k-1)}, \dots, tx_{s-1}^{(k-1)}, 0) dt + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} F_s(tx_1^{(k-1)}, 0, \dots, 0) dt \right| \leq \\
 &\leq D|x_s^{(k-1)}| + \bar{M}\{|x_{s-1}^{(k-1)}| + |x_{s-2}^{(k-1)}| + \dots + |x_1^{(k-1)}|\} \leq \\
 &\leq D|x_s^{(k-1)}| + (s-1)\bar{M}MK^{j-1},
 \end{aligned} \tag{11}$$

on $\bar{M}$ és el valor màxim de les normes de les funcions contínues $\frac{\partial F_s}{\partial x_1}, \frac{\partial F_s}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F_s}{\partial x_{s-1}}$ sobre el compacte L . Per tant, segons l'expressió anterior,

$$|x_s^{(k)}| \leq D|x_s^{(k-1)}| + (s-1)\bar{M}MK^{k-1}.$$

Si anomenem $C = (s-1)\bar{M}M$, tenim la desigualtat

$$|x_s^{(k)}| \leq D|x_s^{(k-1)}| + CK^{k-1}, \tag{12}$$

on remarquem que K i D estan entre 0 i 1. Observem que aquesta desigualtat és la mateixa que (8). Usant, doncs, els mateixos arguments iteratius que en la prova del teorema 12, s'acaba la demostració. $\square$

5 Atracció global per a equacions en diferències

En aquesta secció estudiem condicions d'atracció global per a successions recurrents, també anomenades *equacions en diferències*.

Considerem una equació en diferències d'ordre n :

$$x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{13}$$

on $x_i \in \mathbb{R}$ i $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és de classe C^1 .

Per a estudiar el comportament de les successions generades per (13), cal estudiar la dinàmica generada per les iteracions de

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2, x_3, \dots, f(x_1, x_2, \dots, x_n)). \quad (14)$$

Considerem, doncs, el problema de l'atracció global per a aplicacions de la forma (14), amb $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ (és a dir, $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$) tals que satisfan alguna de les condicions (A_1) , (A_2) , (B_1) o (B_2) .

Veurem que, per a aquest tipus d'aplicacions, les condicions (A_2) i (B_2) impliquen l'existència d'atractor global, mentre que per a les condicions (A_1) i (B_1) mostrarem contraexemples a l'atracció global.

La condició (B_1) no implica l'existència d'atractor global. A l'article [8] es presenta l'exemple

$$F(x, y) = (y, 2e^{-y^2} - bx).$$

Per a $b \in (\frac{2}{e}, 1)$, F té un únic punt fix i satisfà la condició (B_1) .

Es pot veure que per a b més petita i pròxima a 1, F té punts periòdics de període 3 i, per tant, el punt fix no és un atractor global. El comportament dinàmic de F és molt complicat, ja que F es pot veure com un *twist* pertorbat; vegeu l'article [8] per als detalls.

A la figura 1 mostrem centenars d'iterats de tres òrbites de F per a $b = 0.999$.

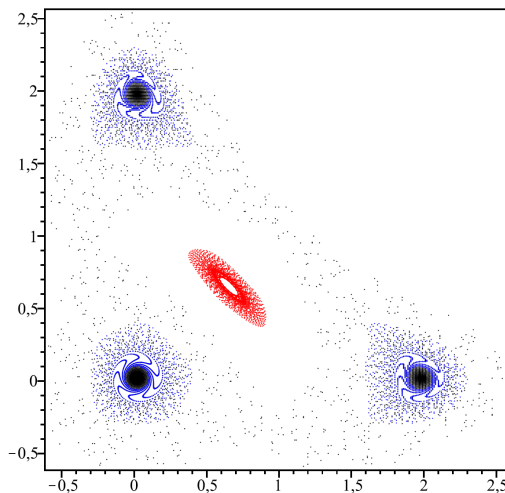


FIGURA 1: Tres òrbites de F per a $b = 0.999$.

En aquest article presentem un exemple d'una aplicació racional senzilla que satisfà (B_1) i que té punts periòdics (vegeu [9]).

Considerem

$$F(x, y) = \left(y, \frac{a}{(1 + y^2)^2} - bx \right), \quad (15)$$

amb els paràmetres $a, b > 0$. És fàcil veure que, per a tot $b \neq -1$, F té un únic punt fix: és el punt (x_0, x_0) , on x_0 és l'únic punt d'intersecció entre les gràfiques de $p(x) := (b + 1)x$ i $q(x) := \frac{a}{(1+x^2)^2}$; és a dir, $\frac{a}{(1+x_0^2)^2} = (b + 1)x_0$. La matriu jacobiana de F és:

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & \frac{-4ay}{(y^2+1)^3} \end{pmatrix}.$$

Les condicions necessàries i suficients perquè el polinomi característic d'una matriu tingui totes les arrels en el disc unitat es coneixen com les *condicions de Jury*; vegeu, per exemple, [3, 26] i les seves referències. Per a matrius d'ordre 2, es resumeixen en $|\tau| < 1 + \Delta < 2$, on τ, Δ són la traça i el determinant de la matriu, respectivament. Per a la nostra matriu, la traça, que depèn de (x, y) , ve donada per $\tau = \frac{-4ay}{(y^2+1)^3}$. Aquesta funció pren com a valor màxim

$$\frac{25\sqrt{5}}{54}|a| = \sqrt{\frac{3125}{2916}}|a|.$$

Obtenim, doncs, que per a tot (x, y) del pla se satisfà $|\tau| \leq \sqrt{\frac{3125}{2916}}|a|$. Prenent a, b amb les condicions

$$|a| < \sqrt{\frac{11\,664}{3125}} \approx 1.93 \quad \text{i} \quad b \in \left(\frac{3125}{11\,664}a^2, 1 \right), \quad (16)$$

assegurem que F satisfà (B_1) .

Després d'un estudi numèric hem obtingut que, per a $a = 9/5$ i $b = 9/10$, l'aplicació (15) té un punt fix a $\mathbf{p} \approx (0.554\,338, 0.554\,338)$ i una òrbita de període 3 que conté $\mathbf{q} \approx (-0.097\,039, 0.241\,179)$. A més, per a aquests valors de a i b se satisfan les desigualtats (16).

Provar analíticament l'existència de $\mathbf{q}$ no és una tasca fàcil, ja que és la solució de dues equacions polinomials de graus 21 i 89. Basant-nos en aquests càlculs, canviem l'estratègia. Forçarem que F tingui una òrbita de període 3 en el punt $(-\frac{1}{10}, \frac{1}{4})$, que és a prop del punt $\mathbf{q}$, i considerarem a i b com a incògnites. Anomenem $g(a, b)$ i $h(a, b)$ els numeradors de la primera i la segona components de l'equació:

$$F^3\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{4}\right).$$

Les funcions g i h són polinomis en les dues variables a, b de graus 5 i 22, respectivament. Per trobar els valors (a, b) que satisfan aquestes dues equacions, considerem les equacions polinomials següents:

$$U(a) := \text{Res}(g, h; b) = 0, \quad V(b) := \text{Res}(g, h; a) = 0,$$

on $\text{Res}(\cdot, \cdot; c)$ denota la resultant respecte a c . Recordem que la resultant de dos polinomis d'una variable és un número, que és zero si i només si els dos polinomis tenen una arrel en comú. Calculant aquestes resultants amb l'ajut de programari de càlcul simbòlic, obtenim:

$$U(a) = a^{16}U_5(a) \quad \text{i} \quad V(b) = (b^2 + 100)^8V_5(b),$$

on U_5 i V_5 són polinomis de grau 5 amb coeficients naturals molt grans, de l'ordre de 10^{30} . Comprovant que $U_5(17/10) \cdot U_5(18/10) < 0$ i que $V_5(89/100) \cdot V_5(90/100) < 0$, i aplicant el teorema de Bolzano, podem afirmar que existeixen $a = a^*$ i $b = b^*$ que satisfan

$$U_5(a^*) = 0, \quad V_5(b^*) = 0, \quad \text{i} \quad a^* \in \left(\frac{17}{10}, \frac{18}{10}\right), \quad b^* \in \left(\frac{89}{100}, \frac{90}{100}\right). \quad (17)$$

Efectivament, $a^* \simeq 1.783\,274$ i $b^* \simeq 0.897\,416$. Finalment, notem que $a^* < 1.8$, $b^* < 1$ i

$$b^* > \frac{89}{100} > \frac{3125}{11\,664} \left(\frac{18}{10}\right)^2 > \frac{3125}{11\,664} (a^*)^2.$$

Per tant, per a aquests valors dels paràmetres, les condicions (16) es compleixen i l'aplicació F satisfà (B_1) . Així, hem provat el resultat següent:

PROPOSICIÓ 21. *Considerem valors de a^* i b^* que compleixin (17). Aleshores, l'aplicació*

$$F(x, y) = \left(y, \frac{a^*}{(1 + y^2)^2} - b^* x \right)$$

satisfà (B_1) , té un punt fix i un punt periòdic de període 3. En particular, el punt fix no és un atractor global de la dinàmica generada per les iteracions de F .

NOTA. A la proposició 3.1 de l'article [17], de 2020, els autors consideren la família 1-paramètrica d'aplicacions $F(x, y) = (y, -bx + \frac{2b}{(1+y^2)^2})$. Aplicant el teorema de Poincaré-Miranda proven l'existència d'una òrbita periòdica de període 3 per a valors de $b \in [113/128, 2916/3125]$ i comproven que, per a aquests valors de b , F satisfà les hipòtesis del problema discret de Markus-Yamabe. Aquesta família inclou el nostre exemple numèric amb $a = 9/5$ i $b = 9/10$.

Ara mostrarem que la mateixa aplicació de la proposició 21 ens serveix per a refutar l'atracció global quan F satisfà la condició (A_1) . Recordem-la: si escrivim $F(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})\mathbf{x}$, aleshores $\rho(A(\mathbf{x})) < 1$ per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Traslladant el punt fix (x_0, x_0) a l'origen, obtenim l'aplicació $G(x, y)$ conjugada de $F(x, y)$ següent:

$$G(x, y) = \left(y, -b^*x + \frac{a^*}{(1 + (y + x_0)^2)^2} - (1 + b^*)x_0 \right),$$

on x_0 satisfà $\frac{a^*}{(1+x_0^2)^2} = (1+b^*)x_0$; és a dir, $G(0,0) = (0,0)$. Observem que $G(x,y)$ té la forma $G(x,y) = (y, -b^*x + h(y))$ i, per tant, la podem descriure com $A(\mathbf{x})\mathbf{x}$:

$$G(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b^* & \frac{h(y)}{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Com que per a la nostra aplicació $h(0) = 0$, per a cada $y \in \mathbb{R}$, aplicant el teorema del valor mitjà, obtenim $h(y) - h(0) = h'(z)y$; és a dir, $h(y)/y = h'(z)$ per a un valor z que es troba entre 0 i y . Això vol dir que, per a cada y , es compleix $A(x,y) = DG(x,z)$. Com que $\rho(DG(\mathbf{x})) < 1$ per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, deduïm que $\rho(A(\mathbf{x})) < 1$ per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$; és a dir, que $G(x,y)$ satisfà la condició (A_1) . Hem provat, doncs, el resultat següent:

PROPOSICIÓ 22. *Donades a^* i b^* que compleixen (17), l'aplicació*

$$G(x,y) = \left(y, -b^*x + \frac{a^*}{(1+(y+x_0)^2)^2} - (1+b^*)x_0 \right)$$

satisfà (A_1) , té el $(0,0)$ com a punt fix i té una òrbita periòdica de període 3. En particular, l'origen no és un atractor global de la dinàmica generada per les iteracions de G .

Ara analitzarem la condició (B_2) . Per a equacions en diferències sí que hem provat l'existència d'atractor global si la F corresponent satisfà la condició (B_2) . El resultat el dona el teorema següent; noteu que proporciona una condició equivalent a (B_2) més fàcil de comprovar.

Com a la secció anterior, donada una matriu A , anomenem $\rho(A)$ el seu radi espectral.

TEOREMA 23. *Si $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$*

$$F(x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)),$$

amb $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Aleshores, les dues condicions següents són equivalents:

(H_1) F satisfà la condició (B_2) ; és a dir, per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\rho(|DF(\mathbf{x})|) < 1$.

(H_2) Per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| < 1. \quad (18)$$

A més, si aquestes condicions se satisfan i F té un punt fix, aleshores aquest punt fix és un atractor global de la dinàmica discreta generada per F .

El resultat anterior estén un criteri d'atracció global ja conegut per a equacions en diferències lineals; vegeu [10, 24, 27]. La condició (18), només exigida al punt fix, ja apareix a [32] per a obtenir resultats d'atracció local.

Alguns comentaris sobre el teorema 23:

- La hipòtesi de tenir un punt fix no es pot obviar; vegeu el lema 26.
- Si la hipòtesi (H_1) es canvia per $\rho(|DF(\mathbf{x})|) < K < 1$, o la hipòtesi (H_2) per $\sum_{i=1}^n |\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})| < K < 1$, aleshores sí que podem treure la hipòtesi que F tingui un punt fix; vegeu el lema 26.
- Si prenem F lineal, amb $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, $a_i \geq 0$, és fàcil veure que, si $\rho(|DF(\mathbf{x})|) \geq 1$, o, equivalentment, $\sum_{i=1}^n |\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})| \geq 1$, aleshores l'origen no és un atractor global; vegeu també [33].

Els propers resultats es poden veure com una demostració simple i auto-continguda de les condicions de Jury per a una classe particular de polinomis. De fet, el lema següent també es pot provar aplicant el teorema de Perron-Frobenius a la matriu

$$A_P := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

ja que, si tenim en compte les hipòtesis del lema, és una matriu no negativa i el seu polinomi característic és $(-1)^n(\lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i) = (-1)^n P(\lambda)$. Donat un polinomi P , definim $\rho(P) = \max\{|\lambda| : P(\lambda) = 0\}$.

LEMA 24. *Sigui $P(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i$ un polinomi amb $a_i \leq 0$ per a tot i , amb $\sum_{i=0}^{n-1} a_i \neq 0$. Aleshores P té una única arrel real positiva, α , i $\rho(P) = \alpha$.*

PROVA. Aplicant la regla de Descartes, sabem que P té una única arrel positiva, diguem-ne α . Sigui β una altra arrel de P (real o complexa) i suposem, per arribar a contradicció, que $|\beta| > \alpha$. Com que $1 = \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \beta^{i-n}$, amb $i - n < 0$, obtenim

$$1 \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| |\beta|^{i-n} < \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \alpha^{i-n} = 1,$$

una contradicció. Per tant, $\rho(P) = \alpha$. □

El lema anterior estén alguns resultats de [33], on es tracta el cas $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = 1$.

NOTA. Sigui $P(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i$ un polinomi amb $a_i \leq 0$ per a tot i . Pel lema 24, quan $\sum_{i=0}^{n-1} a_i \neq 0$, o directament si aquesta suma és zero, es compleix el següent: donada $K > 0$, $\rho(P) < K$ si i només si $P(K) > 0$. Precisament, $P(1) > 0$ és la primera condició de Jury, que, per a aquesta classe de polinomis, és també suficient per a caracteritzar $\rho(P) < 1$.

El proper resultat relaciona $\rho(P)$ i $\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$. Per $a, b \in \mathbb{R}$, denotem per $\langle a, b \rangle$ l'interval tancat amb extrems a i b .

PROPOSICIÓ 25. Sigui $P(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i$ un polinomi amb $a_i \leq 0$ per a tot i . Aleshores:

(i) Si $\rho(P) = K < 1$, aleshores $\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \leq K$.

(ii) Si $\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| = K$, aleshores $\rho(P) \in \langle K, \sqrt[n]{K} \rangle$.

PROVA. Si tots els a_i són zero, el resultat és trivial ja que aquesta condició és equivalent a $\rho(P) = 0$. Suposem, doncs, que $\sum_{i=0}^{n-1} a_i \neq 0$.

(i) Pel lema 24 sabem que $P(K) = 0$; és a dir, $K^n = \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| K^i$. Dividint aquesta igualtat per K^{n-1} , obtenim

$$K = \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| K^{i-n+1} \geq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|,$$

tal com volíem veure.

(ii) Si $K = 1$, el resultat se segueix directament. Si $K < 1$,

$$P(\sqrt[n]{K}) = K - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| K^{\frac{i}{n}} \geq K - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| = 0,$$

$$\frac{P(K)}{K^{n-1}} = K - |a_{n-1}| - \sum_{i=0}^{n-2} |a_i| K^{i-n+1} \leq K - |a_{n-1}| - \sum_{i=0}^{n-2} |a_i| = 0,$$

i el resultat és una conseqüència del lema 24. Quan $K > 1$, seguim els mateixos passos per a obtenir les desigualtats revertides. $\square$

Ara ja tenim els preliminars per a provar el teorema 23.

PROVA DEL TEOREMA 23. Primer provarem que (H_1) i (H_2) són equivalents. El polinomi característic de $|DF(\mathbf{x})|$ és

$$(-1)^n \left(\lambda^n - \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| \lambda^{i-1} \right) := (-1)^n P_{\mathbf{x}}(\lambda).$$

Ja sabem que $\rho(|DF(\mathbf{x})|) = \rho(P_{\mathbf{x}}) < 1$ si i només si $P_{\mathbf{x}}(1) > 0$, que és equivalent a $\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| < 1$ per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, com volíem veure.

Per a provar la segona part del teorema, notem que, si $\mathbf{p}$ és el punt fix, necessàriament $\mathbf{p} = (p, \dots, p)$ per a algun $p \in \mathbb{R}$. Aleshores, conjugant F amb una translació, podem suposar que $\mathbf{p} = \mathbf{0}$.

Sigui $V(x_1, \dots, x_n) = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$. Demostrarem que V és una funció de Liapunov estricta per a F^n , fet que implicarà que l'origen és un atractor global per F^n . Clarament, aquest resultat implica l'atracció global per F . Per a $i = 1, \dots, n$, sigui $x_{n+i} = f(x_i, \dots, x_{n+i-1})$. Afirmem que

$$|x_{n+i}| < \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = V(x_1, \dots, x_n),$$

per a tot $i = 1, \dots, n$.

Per a $i = 1$, tenim

$$\begin{aligned}
 |x_{n+1}| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{ds} (f(sx_1, \dots, sx_n)) ds \right| = \left| \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (sx_1, \dots, sx_n) x_i \right) ds \right| \leq \\
 &\leq \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} (sx_1, \dots, sx_n) \right| \right) ds \leq \\
 &\leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} (sx_1, \dots, sx_n) \right| \right) ds < \\
 &< \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.
 \end{aligned}$$

Hem demostrat, doncs, l'afirmació per a $i = 1$. Ara suposem que l'afirmació és certa per a i i provem-la per a $i + 1$. Argumentant com abans, obtenim que

$$|x_{n+i+1}| < \max\{|x_{i+1}|, \dots, |x_{n+i}|\}.$$

Per tant, pel principi d'inducció tenim que $|x_{n+j}| < V(x_1, \dots, x_n)$ per a tot $1 \leq j \leq i$ i $|x_l| \leq V(x_1, \dots, x_n)$ per a $l \in \{1, \dots, n\}$. Això acaba la prova de l'afirmació anterior. Per tant,

$$V(F^n(x_1, \dots, x_n)) = V(x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = \max\{|x_{n+1}|, \dots, |x_{2n}|\} < V(x_1, \dots, x_n),$$

fet que prova que V és decreixent sobre les òrbites de F^n . Com que, a més, $V(\mathbf{x}) = 0$ si i només si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, i $V(\mathbf{x}) \geq 0$ per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, tenim que V és una funció de Liapunov estricta per a F^n i acabem la demostració. $\square$

L'exemple següent mostra que l'existència del punt fix és imprescindible perquè la tesi del teorema sigui certa.

LEMA 26. *L'aplicació $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(x_2, x_3, \dots, \ln(1 + e^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}}) \right),$$

no té punts fixos. A més, per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, les matrius $DF(\mathbf{x})$ i $|DF(\mathbf{x})|$ tenen tots els seus valors propis de mòdul més petit que 1.

PROVA. L'equació $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ implica $\mathbf{x} = (x, x, \dots, x)$ i $x = \ln(1 + e^x)$, que no té solució. Per tant, F no té punts fixos.

Notem que $DF(\mathbf{x}) = |DF(\mathbf{x})|$ i que el polinomi característic d'aquesta matriu és

$$P_{\mathbf{x}}(\lambda) = \lambda^n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{e^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}}}{1 + e^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}}} \lambda^{i-1}.$$

Aleshores, $P_{\mathbf{x}}(1) > 0$ i totes les hipòtesis del lema 24 es compleixen. Per tant, per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\rho(A(\mathbf{x})) < 1$, tal com volíem provar. $\square$

En contrast amb el resultat anterior, una condició una mica més forta que (H_1) , o (H_2) , assumida en el teorema 23, sí que força l'existència del punt fix.

TEOREMA 27. *Sigui $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com al teorema 23. Aleshores les dues condicions següents són equivalents:*

(i) *Existeix $\tilde{K} < 1$ tal que per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\rho(|DF(\mathbf{x})|) < \tilde{K}$.*

(ii) *Existeix $K < 1$ tal que per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| < K$.*

A més, si aquestes condicions se satisfan, aleshores F té un punt fix que és un atractor global de la dinàmica generada per F .

PROVA. (i) $\Rightarrow$ (ii) Per hipòtesi,

$$\rho(|DF(\mathbf{x})|) = \rho \left(\lambda^n - \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| \lambda^{i-1} \right) < \tilde{K} < 1.$$

Prenent K tal que $\tilde{K} < K < 1$ i usant la proposició 25(i), obtenim

$$\sum_{i=1}^n |D_i(f)(\mathbf{x})| < \tilde{K} < K < 1.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Suposem que per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| < K < 1$. De la proposició 25(ii), tenim que $\rho(|DF(\mathbf{x})|) < \sqrt[n]{K} < 1$ i se segueix la implicació.

Finalment, gràcies al teorema 23, per a acabar la demostració, hem de provar que F té un punt fix. Suposem que (ii) és certa. Hem de provar que l'equació $g(\mathbf{x}) := f(x, \dots, x) = \mathbf{x}$ té alguna solució. Com que

$$|g'(\mathbf{x})| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \dots, x) \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \dots, x) \right| < K < 1,$$

se segueix que g és una contracció i, per tant, té un punt fix p . Aleshores, $(p, \dots, p)$ és un punt fix per a F , i acabem la demostració. $\square$

Usant les eines introduïdes en aquesta secció, es pot provar el resultat següent, que dona una resposta afirmativa al problema de l'atracció global per a aplicacions de tipus (13) que satisfan (A_2) .

TEOREMA 28. *Sigui $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació de la forma*

$$F(x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)),$$

amb $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Suposem que $F(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x})\mathbf{x}$ i que, per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\rho(|B(\mathbf{x})|) < 1$. Aleshores, l'origen és un atractor global per la dinàmica discreta generada per F .

6 Comentaris finals

En aquest article hem donat diferents hipòtesis sobre sistemes dinàmics discrets i continus que impliquen l'existència d'un atractor global. Com ja dèiem a la introducció, aquest tipus de resultats són molt útils en les aplicacions, ja que permeten modelar processos que, amb els paràmetres adequats, donaran com a resultat l'existència d'un equilibri global.

A la literatura apareixen punts d'equilibri de sistemes dinàmics que són punts localment asimptòticament estables. Són atractors locals que, al seu torn, són estables en el sentit de Liapunov. I els punts globalment asimptòticament estables són punts estables que són atractors globals del sistema. Tots els resultats presentats en aquest article que demostrin l'existència d'un atractor global, de fet, es refereixen a punts globalment asimptòticament estables. El motiu d'això és que els punts són estables pel teorema de linealització.

Tenint en compte els resultats que hem exposat, cal remarcar que hem provat que si $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és de classe C^1 , té un punt fix, i alguna de les hipòtesis següents és certa:

- $n = 1$,
- F és triangular,
- F és polinomial,
- F és de la forma (14),

aleshores, la condició (B_2) : $\rho(|DF(\mathbf{x})|) < 1$ implica que el punt fix és globalment asimptòticament estable. Però no hem provat que la tesi sigui certa per a aplicacions de classe C^1 amb un punt fix que satisfan la condició (B_2) . Deixem, doncs, aquest problema obert.

Referències

- [1] BERNAT, J.; LLIBRE, J. «Counterexample to Kalman and Markus-Yamabe conjectures in dimension larger than 3». *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems*, 2 (3) (1996), 337-379.
- [2] BISCHI, G. I.; CHIARELLA, C.; KOPEL, M.; SZIDAROVSKY, F. *Nonlinear Oligopolies. Stability and Bifurcations*. Berlín: Springer-Verlag, 2010.
- [3] CHOO, Y. «An elementary proof of the Jury test for real polynomials». *Automatica J. IFAC*, 47 (1) (2011), 249-252.
- [4] CIMA, A.; VAN DEN ESSEN, A.; GASULL, A.; HUBBERS, E.; MAÑOSAS, F. «A polynomial counterexample to the Markus-Yamabe conjecture». *Adv. Math.*, 131 (2) (1997), 453-457.
- [5] CIMA, A.; GASULL, A.; MAÑOSAS, F. «A polynomial class of Markus-Yamabe counterexamples». *Proceedings of the Symposium on Planar Vector Fields* (Lleida, 1996). *Publ. Mat.*, 41 (1) (1997), 85-100.
- [6] CIMA, A.; GASULL, A.; MAÑOSAS, F. «The discrete Markus-Yamabe problem». *Nonlinear Anal., Ser. A: Theory Methods*, 35 (3) (1999), 343-354.

- [7] CIMA, A.; GASULL, A.; MAÑOSAS, F. «A note on LaSalle's problems». Polynomial automorphisms and related topics (Kraków, 1999). *Ann. Polon. Math.*, 76 (1-2) (2001), 33-46.
- [8] CIMA, A.; GASULL, A.; MAÑOSAS, F. «Examples and counterexamples for Markus-Yamabe and LaSalle global asymptotic stability problems». A: *Proceedings of the Workshop Future Directions in Difference Equations*. Vigo: Universidade de Vigo. Servizo de Publicacións, 2011, 89-96. (Congresos; 69)
- [9] CIMA, A.; GASULL, A.; MAÑOSAS, F. «On the global asymptotic stability of difference equations satisfying a Markus-Yamabe condition». *Publ. Mat.*, vol. extra (2014), 167-178.
- [10] CLARK, C. W. «A delayed-recruitment model of population dynamics, with an application to baleen whale populations». *J. Math. Biol.*, 3 (3-4) (1976), 381-391.
- [11] DILLEN, F. «Polynomials with constant Hessian determinant». *J. Pure Appl. Algebra*, 71 (1) (1991), 13-18.
- [12] DO CARMO, M. P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1976. [Traduït del portuguès]
- [13] DRUŻKOWSKI, L. M. «An effective approach to Keller's Jacobian conjecture». *Math. Ann.*, 264 (3) (1983), 303-313.
- [14] FESSLER, R. «A proof of the two-dimensional Markus-Yamabe stability conjecture and a generalization». *Ann. Polon. Math.*, 62 (1) (1995), 45-74.
- [15] GANDOLFO G. *Economic Dynamics*. Berlín: Springer Verlag, 1996.
- [16] GANTMACHER, F. R. *The Theory of Matrices*. Vol. 1, 2. Nova York: Chelsea Publishing Co., 1959. [Traduït per K. A. Hirsch]
- [17] GASULL, A.; MAÑOSA, V. «Periodic orbits of discrete and continuous dynamical systems via Poincaré-Miranda theorem». *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 25 (2) (2020), 651-670.
- [18] GLUTSYUK, A. A. «The asymptotic stability of the linearization of a vector field on the plane with a singular point implies global stability». En rus. *Funktsional. Anal. i Prilozhen*, 29 (4) (1995), 17-30; traducció a: *Funct. Anal. Appl.*, 29 (4) (1995), 238-247.
- [19] GRÖLL, L. *Methodik zur Integration von Vorwissen in die Modellbildung*. Karlsruhe Scientific Publishing, 2015.
- [20] GUTIÉRREZ, C. «A solution to the bidimensional global asymptotic stability conjecture». *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 12 (6) (1995), 627-671.
- [21] HARTMAN, P. *Ordinary Differential Equations*. Nova York; Londres; Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1964.
- [22] HOFBAUER, J.; SIGMUND, K. *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

- [23] JÖRGENS, K. «Über die Lösungen der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$ ». *Math. Ann.*, 127 (1954), 130-134.
- [24] KOCIĆ, V. L.; LADAS, G. *Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1993. (Mathematics and its Applications; 256)
- [25] LASALLE, J. P. *The Stability of Dynamical Systems*. Amb un apèndix: «Limiting equations and stability of nonautonomous ordinary differential equations», per Z. Artstein. Filadèlfia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976. [Regional Conference Series in Applied Mathematics]
- [26] LEWIS, R. *Network Models in Population Biology*. Berlín; Nova York: Springer-Verlag, 1977. (Biomathematics; 7)
- [27] LIZ, E. «On explicit conditions for the asymptotic stability of linear higher order difference equations». *J. Math. Anal. Appl.*, 303 (2) (2005), 492-498.
- [28] MARKUS, L.; YAMABE, H. «Global stability criteria for differential systems». *Osaka Math. J.*, 12 (1960), 305-317.
- [29] MEISTERS, G.; OLECH, C. «Solution of the global asymptotic stability Jacobian conjecture for the polynomial case». A: *Analyse mathématique et applications*. Montrouge: Gauthier-Villars, 1988, 373-381.
- [30] MURRAY, J. D. *Mathematical Biology*. 2a ed. Berlín: Springer-Verlag, 1993. (Biomathematics; 19)
- [31] OLECH, C. «On the global stability of an autonomous system on the plane». *Contributions to Differential Equations*, 1 (1963), 389-400.
- [32] SEDAGHAT, H. «Geometric stability conditions for higher order difference equations». *J. Math. Anal. Appl.*, 224 (2) (1998), 255-272.
- [33] STEVIĆ, S. «A note on the recursive sequence $x_{n+1} = p_k x_n + p_{k-1} x_{n-1} + \dots + p_1 x_{n-k+1}$ ». *Ukrain. Mat. Zh.*, 55 (4) (2003), 570-574. [Reimprès a *Ukrainian Math. J.*, 55 (4) (2003), 691-697]
- [34] STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Addison-Wesley Publishing, 1994.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
 UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
 EDIFICI C, CAMPUS DE LA UAB
 08193 BELLATERRA (CERDANYOLA DEL VALLÈS)
 cima@mat.uab.cat

Introducció a l'anàlisi topològica de dades i aplicacions

ESTHER IBÁÑEZ-MARCELO

Reserveu-vos el dret a pensar, perquè fins i tot pensar malament és millor que no pensar gens.

Hipàtia d'Alexandria (350–370 dC - 415 dC)

Resum: L'anàlisi topològica de dades (*Topological Data Analysis*, TDA) ha tingut un gran auge els darrers deu anys. En aquest article en presentem una introducció a partir dels conceptes i les definicions fonamentals que ens permeten descriure les eines principals d'aquesta nova branca en la qual es dona més importància a la forma que a la mètrica. Veurem en què consisteix l'homologia persistent i com pot ser aplicada en un ampli rang de camps científics, com, per exemple, la neurociència, el reconeixement d'imatges i la genètica, entre d'altres.

Paraules clau: homologia persistent, diagrama de persistència, codi de barres, *Mapper*, anàlisi de dades.

Classificació MSC2010: 55N31, 62R40, 68T09.

1 Introducció

En els últims vint anys s'han desenvolupat un conjunt de mètodes basats en la topologia algebraica com a noves eines per a l'anàlisi de dades. És el que s'anomena *anàlisi topològica de dades* (*topological data analysis*; d'ara endavant, per simplificar-ho, usarem la sigla TDA per a referir-nos a aquests mètodes). A grans trets, la TDA deixa de banda les mètriques i se centra a extreure la *forma* de les dades. És a dir, dona importància a la topologia i no a les mètriques.

La TDA ens permet extreure informació de dades amb soroll i d'alta dimensionalitat, fet que normalment és un gran repte amb les metodologies basades en distàncies entre punts donades per una mètrica.

Dins de la TDA, l'eina principal és l'anomenada *homologia persistent* [12, 42], la qual ens permet obtenir un resum multiescala d'un conjunt de dades. A més a més, aquesta aproximació té garanties de robustesa respecte de les perturbacions de les dades [29, 22, 26].

La topologia tracta la informació geomètrica des del punt de vista qualitatiu. És a dir, estudia com estan relacionats els conjunts de punts dins d'un espai. Aquesta manera d'estudiar les propietats geomètriques depèn molt menys del sistema mètric (o de coordenades) triat i ens és molt més útil quan només volem entendre l'estructura de les dades, sense entrar detalladament en les mètriques. A més, amb l'homologia persistent veurem que podem definir l'escala a la qual volem estudiar la topologia de les dades. Per tant, a part de ser un mètode a primera vista més qualitatiu, també és quantificable, tal com veurem més endavant.

En els darrers anys, la computació de l'homologia persistent i la representació dels seus resultats han evolucionat molt ràpidament gràcies també a la tecnologia i a l'increment del potencial de les màquines actuals, fet que ha permès que un càlcul que fa cinc anys no era possible de fer degut al volum de dades, avui dia sí que ho sigui. A més, al llarg dels anys, han anat sortint diverses formes de representar els resultats de l'homologia persistent, de manera que fins i tot aquestes característiques homològiques es poden usar com a dades d'entrada d'algoritmes d'aprenentatge automàtic (*machine learning*, ML). D'altra banda, l'increment de programari, principalment com a llibreria de llenguatges tan usats com Python, ha permès que molts més usuaris no experts en la teoria d'homologia persistent poguessin utilitzar aquesta tècnica i, per tant, que l'ús dels mètodes de TDA es difongués d'una manera més ràpida.

D'altra banda, en relació amb les tècniques de TDA, també hi podem incloure l'anomenat *algoritme Mapper* [89], que divideix les dades en clústers a partir d'un filtre de clusterització i extreu l'estructura de les dades a nivell de graf. Les mateixes dades es poden estudiar a partir de filtres diversos, d'algoritmes diferents d'anàlisi de clústers i també a escales distintes.

1.1 Fem una mica d'història

La idea principal de les eines de TDA rau en abandonar les mètriques estàndard entre punts i centrar-se en la forma de les dades al llarg d'un rang d'escales. Es tracta de donar una visió global de les nostres dades o espai topològic, en comptes de focalitzar-nos en el seu comportament a nivell mètric. A més a més, l'homologia persistent garanteix robustesa davant de pertorbacions de les dades; en aquest sentit, en els darrers anys se n'ha millorat d'una manera significativa la computació per a conjunts de dades cada cop més grans. Aquestes eines també poden ser molt útils en espais i dades en què és difícil definir una mètrica.

Si anem enrere en el temps, podem dir que l'homologia persistent va néixer a partir dels treballs sobre *funcions de mida* (*size functions*) de Patrizio Frosini, als anys noranta [47], i de Vanessa Robins [86], a finals dels noranta, en els quals s'inferia la topologia dels atractors en sistemes dinàmics a partir de dades experimentals.

Cal dir que després hem d'esperar fins als anys 2000, en què apareixen els treballs en àmbit computacional i geomètric d'Edelsbrunner, Letscher, Zomorodian i Delfinado [36, 43], els quals permeten calcular d'una manera eficient

els nombres de Betti persistents i, des del punt de vista algebraic, tenim els resultats de Carlsson [99].

Podem dir que durant la primera dècada del 2000 se'n desenvolupa la teoria, mentre que a partir del 2010 s'amplia l'ús d'aquestes eines en problemes reals. Els resultats d'estabilitat en homologia persistent a partir del 2007 ([29]) van permetre confiar en aquesta tècnica i estendre'n l'ús en àmbits més aplicats. Gràcies a millores en el càlcul teòric i pràctic de l'homologia [5], trobem aplicacions que van des de la neurociència amb tractaments a nivells diferents [33, 60, 67, 7, 52] fins al reconeixement d'imatges [71], passant per la genètica [81, 21], alguns problemes de cobertura en xarxes de comunicació [35], l'estudi de sistemes espacials [46] i la classificació de xarxes [90, 62].

Podeu trobar una bona revisió sobre la història de l'homologia persistent a [80] i sobre el càlcul de l'homologia persistent, a [41]. D'altra banda, en l'àmbit més computacional, a [79] es presenta un bon resum de llibreries i tècniques per a calcular l'homologia persistent.

2 Definicions bàsiques: cadenes, símplexs i homologia

A continuació presentarem d'una manera més tècnica alguns conceptes bàsics per a poder entendre i definir l'homologia, i, tot seguit, veurem l'homologia persistent. Se'n pot trobar més informació en les referències clàssiques de topologia algebraica, com ara els llibres de Hatcher [56] i de Munkres [77], i si es vol aprofundir en conceptes com filtracions, homologia simplicial i homologia persistent, es poden consultar [43, 12, 42, 99].

2.1 Símplex, complex i cadena simplicial, i aplicació vora

De manera intuïtiva, podem definir un *complex simplicial* $\mathcal{K}$ a $\mathbb{R}^N$ (o, també, la seva anomenada *realització geomètrica*) com un espai topològic construït per símplexs. Un *símplex* de dimensió n a $\mathbb{R}^N$, o *n-símplex*, $\sigma_n = \{p_0, \dots, p_{n-1}\}$, es defineix pels seus vèrtexs p_i i es pot pensar com l'envolupant convexa d'aquest conjunt de punts. Si considerem els símplexs immersos en l'espai, aleshores els podem visualitzar com a punts o vèrtexs (en dimensió 0), arestes o segments (en dimensió 1), triangles (en dimensió 2), i així successivament. Cal dir que, des del punt de vista de grafs, els símplexs són les anomenades *cliques* (o *n-cliques*); és a dir, subgrafs complets: nodes (en dimensió 0), arestes (en dimensió 1), triangles plens (en dimensió 2), tetraedres (en dimensió 3), etc. (vegeu la figura 1).

Ara bé, de manera formal, un *complex simplicial abstracte* és una estructura combinatòria que consisteix en una parella $(X, \mathcal{K})$, on X és un conjunt i $\mathcal{K}$ és una família de subconjunts no buits de X tal que, si $\sigma \in \mathcal{K}$ i $\tau \subseteq \sigma$, aleshores $\tau \in \mathcal{K}$.

A partir d'això, donat un $\sigma \in \mathcal{K}$, si $\tau \subseteq \sigma$, aleshores diem que τ és una *cara* de σ .

Donat un n -símplex $\sigma_n = \{p_0, \dots, p_{n-1}\}$ i una permutació ρ , considerem el símplex $\sigma' = \{p_{\rho(0)}, \dots, p_{\rho(n-1)}\}$. Si ρ té signe positiu (resp., negatiu), diem que σ i σ' tenen (resp., no tenen) la mateixa orientació.

Donat un complex simplicial, podem crear-ne la realització topològica, és a dir, l'espai topològic del qual el complex simplicial seria una triangulació. Així, d'ara endavant, doncs, quan parlem d'espai topològic ens referirem a l'espai topològic induït per un complex simplicial.

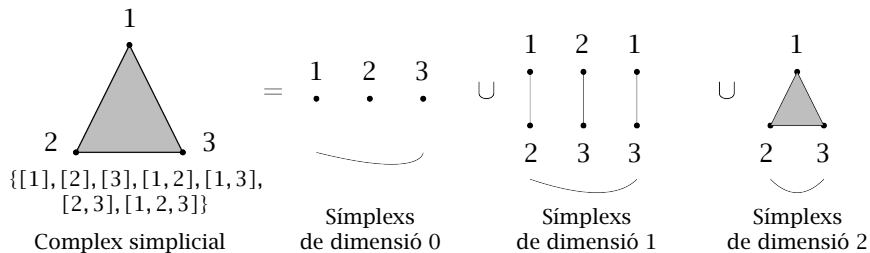


FIGURA 1: Exemple de complex simplicial i les seves parts. Un triangle ple està compost per tres 0-símplexs (punts), tres 1-símplexs (segments) i un 2-símplex (el triangle ple $[1, 2, 3]$).

Una *cadena simplicial* és la combinació entera formal de n -símplexs orientats, i el conjunt de cadenes simplicials ve donat per:

$$C_n(X) = \{r_1\sigma_1 + r_2\sigma_2 + \dots + r_i\sigma_i \mid r_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i \in X_n\},$$

on X_n es refereix al conjunt de símplexs de dimensió n , i en aquesta combinació, el símplex d'orientació oposada a σ_i s'identifica amb $-\sigma_i$. És a dir, a nivell de cadena simplicial, $[p_0, \dots, p_{n-1}] = \text{sgn}(\rho)[p_{\rho(0)}, \dots, p_{\rho(n-1)}]$, on ρ és una permutació.

A continuació podem definir l'aplicació de les cadenes de dimensió n , $C_n(X)$, a les cadenes de dimensió $n-1$, $C_{n-1}(X)$, que es correspon amb el concepte intuïtiu de vora. Definim l'*aplicació vora* com

$$\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$$

$$[v_1, \dots, v_n] \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n].$$

Observem que se satisfà $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ per a tota n ; en podem veure un exemple a la figura 2.

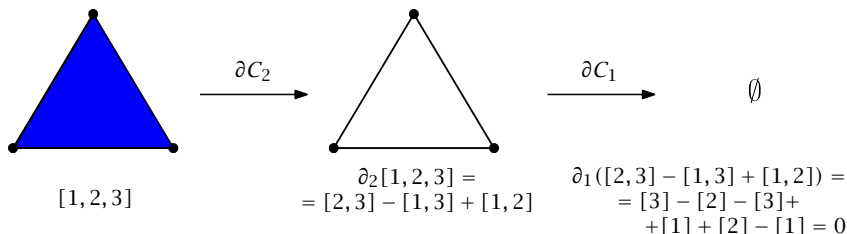


FIGURA 2: Exemple d'ús de l'aplicació vora sobre el 2-símplex $[1, 2, 3]$.

2.2 L'homologia simplicial i els nombres de Betti

L'*homologia* ens proporciona invariants topològics que permeten diferenciar un espai topològic en funció de les seves característiques *de forma*. De manera grollera, podem dir que l'homologia compta el nombre de forats per a cada dimensió. Per exemple, les components connexes d'un espai topològic ens determinarien l'homologia de dimensió 0, els cicles serien els elements de l'homologia de dimensió 1, les cavitats correspondrien a l'homologia de dimensió 2, i així successivament.

Donat un complex, l'*homologia simplicial* formalitza la idea de comptar el nombre de forats de dimensió n .

Un complex simplicial X induïx un complex de cadenes simplicials, $C_n(X)$ (per simplificar-ho usarem només la notació C_n),

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

que s'acostuma a escriure com a $(C_\bullet, \partial_\bullet)$. Les cadenes que tenen vora 0 s'anomenen *cicles* i formen un subespai, Z_n , de C_n , mentre que el subespai B_n de C_n està format per les cadenes que pertanyen a la imatge de ∂_{n+1} . Donat que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, obtenim la inclusió següent:

$$B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n.$$

A la figura 3 es mostren les relacions de subgrup entre els grups de vores, cicles i cadenes entre dimensions, mitjançant l'aplicació vora.

La n -homologia d'aquest complex es defineix com el quocient de dos $\mathbb{Z}$ -mòduls (és a dir, grups abelians), el nucli de l'aplicació ∂_n i la imatge de l'aplicació vora en una dimensió superior, ∂_{n+1} ,

$$H_n(X) = \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1} = Z_n / B_n.$$

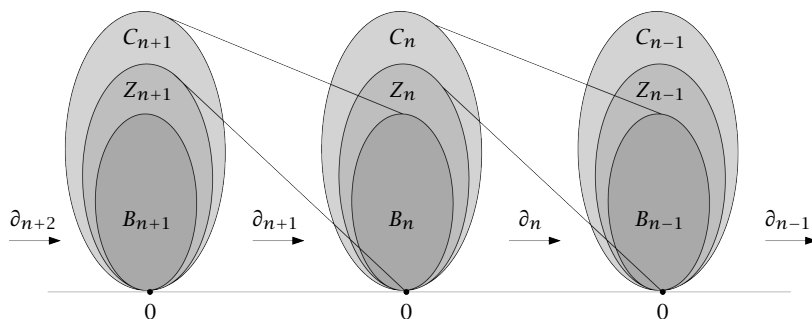


FIGURA 3: Complex de cadenes consistent en una successió lineal de grups de cadenes, cicles i vores connectats mitjançant homomorfismes.

Per a calcular l'homologia d'un espai topològic, usarem els complexos simplicials, fet pel qual rep el nom de *homologia simplicial*.

Els *nombres de Betti*, β_n , corresponen a les dimensions de l'homologia, és a dir, al rang¹ dels grups $H_n(X)$. Per tant, $\beta_n = \text{rang } Z_n - \text{rang } B_n$.

En altres paraules, el k -èsim nombre de Betti, β_k , es correspon amb el nombre de forats k -dimensionals en un espai topològic. Per exemple,

- β_0 és el nombre de components connexes.
- β_1 és el nombre de forats circulars (o 1-dimensionals).
- β_2 és el nombre de cavitats o forats 2-dimensionals.

Podem veure un exemple senzill d'un tor a la figura 4.

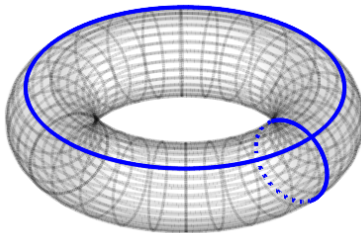


FIGURA 4: Exemple gràfic dels nombres de Betti corresponents a un tor: $\beta_0 = 1$ perquè tenim una única component connexa; $\beta_1 = 2$ perquè tenim dos cicles 1-dimensionals ressaltats a la figura; $\beta_2 = 1$ a causa de la cavitat interna que defineix la superfície del tor; finalment, $\beta_i = 0$ per a tota $i > 2$.

3 Homologia persistent i filtracions

Abans de passar a definir l'homologia persistent, ens cal introduir el concepte de *filtració*, el qual ens permet definir la idea de *persistència*.

3.1 Filtracions

Donat un complex simplicial X , una *filtració simplicial* és una col·lecció jeràrquica de complexos simplicials X^i de la forma:

$$\emptyset = X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots \subseteq X^m = X.$$

D'altra banda, també es poden definir filtracions sobre espais topològics (en particular, sobre varietats) a través de funcions. Donada una varietat $\mathbb{M}$ i una funció, $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$, definim la família de subespais (subvarietats) $\mathbb{M}^t = f^{-1}((-\infty, t])$, $t \in \mathbb{R}$, que compleixen $\mathbb{M}^t \subseteq \mathbb{M}^s$, si $t < s$. Aquesta inclusió ens defineix una filtració i la funció f és l'anomenada *funció de filtració*. En aquest cas, l'homologia persistent ens dona informació sobre la forma de les subvarietats.

¹ Ens referim a rang de $H_n(X)$ com el nombre màxim de generadors linealment independents; és a dir, el nombre de generadors de la part lliure de torsió de $H_n(X)$.

3.2 Homologia persistent

Un cop definides l'homologia simplicial i les filtracions, podem descriure l'homologia persistent, la qual és una versió parametritzada dels nombres de Betti, però amb l'avantatge que podem obtenir una representació gràfica, anomenada *diagrama persistent* (o *de persistència*), o bé una representació equivalent anomenada *codi de barres* (*barcode*); ambdues representacions contenen molta més informació que els nombres de Betti (vegeu la subsecció 3.4). De fet, les representacions gràfiques de l'homologia persistent en codifiquen fidedignament tota la informació i això ens permet, a més, tenir la informació homològica des del punt de vista quantitatiu.

Donada una filtració $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ sobre un espai topològic X , $X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots \subseteq X^m$, es pot veure que la inclusió d'aquests espais topològics indueix un morfisme de grups de les respectives homologies $X^j \subset X^{j+1}$; és a dir, la inclusió $X^j \hookrightarrow X^{j+1}$ indueix el morfisme $H_k(X^j) \rightarrow H_k(X^{j+1})$.

L' i -èsim complex simplicial X^i en una filtració dona lloc al seu propi complex de cadenes (C_n^i, ∂_n^i) i als n -èsims mòduls de cadenes, cicles, vores i homologia se'ls denota amb C_n^i , Z_n^i , B_n^i i H_n^i , respectivament. Observem que l'ús de superíndexs serveix per a indicar el pas a la filtració, però no té a veure amb la cohomologia.

D'aquesta manera, podem definir la n -èsima homologia p -persistent de X^i , per a $p \in \mathbb{N}$, com

$$H_n^{i,p}(X) = Z_n^i / (B_n^{i+p} \cap Z_n^i).$$

$H_n^{i,p}(X)$ caracteritza els forats de dimensió n a X^{i+p} creats pel subcomplex X^i . Aquests forats existeixen per a tots els complexos X^j a la filtració amb índex $i \leq j \leq i + p$. Els elements no nuls de $H_n^{i,p}(X)$ són classes de n -cicles en el complex X^i que no són vora de cap $(n + 1)$ -cadena del complex més gran X^{i+p} .

Diem que una classe homològica $\alpha \in H_n(X^i)$ neix al pas i si $\alpha \notin \text{Im}(H_n(X^{i-1}) \rightarrow H_n(X^i))$. Anàlogament, diem que $\alpha \in H_n(X^j)$ mor al pas j si $\alpha \neq 0$ però la seva imatge sota l'aplicació $H_n(X^j) \rightarrow H_n(X^{j+1})$ és zero. Si α neix al pas i i mor al pas j , definim la seva *persistència* com el número $p = j - i$. Cal notar que $H_n^{i,p}(X)$ representa les classes d'homologia que han nascut abans del pas i i que moren després del pas $i + p$. Per això es diu que tenen persistència p .

Volem remarcar que, tot i que per ara hem parlat de la $\mathbb{Z}$ -homologia, a la pràctica es treballa sempre sobre un cos $\mathbb{F}$, habitualment $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Treballar sobre un cos és computacionalment més senzill (no ens hem de preocupar de la torsió) i, a més, ens assegura que el diagrama de persistència conté la mateixa informació que la continguda en $\{H_n^{i,p}(X)\}_{i,p,n}$; vegeu [99] per a més detalls sobre aquesta correspondència.

3.2.1 Homologia d -persistent De la mateixa manera que triem el paràmetre o la mètrica per a fer la filtració, podem triar dos paràmetres diferents i obtenir dues filtracions diferents. Això va donar lloc a l'estudi de l'*homologia d -persistent*, també coneguda com a *multiparamètrica* [49]. Per al càlcul de

l'homologia d -persistent, ens cal tenir filtracions indexades per més d'un paràmetre; per exemple, donat un conjunt de dades $X \subset \mathbb{R}^d$ ens podem interessar, posem per cas, per una banda en les regions més denses [14] i, per l'altra, en aquelles on la curvatura és més gran [17]. Això ens permet definir de manera natural els complexos $\mathbb{Z}^n$ -filtrats, $\{K_u\}_{u \in \mathbb{Z}^n}$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, on $K_u \subset K_v$ quan $u \leq v$; és a dir, $(u_1 \leq v_1, \dots, u_n \leq v_n)$. En aquest punt, els càlculs es compliquen més, i no entrarem en els detalls, però van obrir les portes a treballs com els de Carlsson i Knudson [16, 64] i a d'altres més recents [55, 87, 91].

3.3 Filtracions associades a un conjunt de dades

Un cop definida l'homologia persistent des del punt de vista teòric, cal que fem un petit resum de com es genera una filtració de complexos simplicials a partir d'un conjunt de dades.

Donat un conjunt de punts en un espai mètric, obtenim una filtració usant *filtracions via complexos de Čech o Rips-Vietoris* [26, 53, 57]; aquesta última és la filtració més comuna, per exemple, quan es treballa amb dades biomèdiques o d'imatge (vegeu la figura 5).

A continuació, donem una pinzellada de com funcionarien aquestes filtracions per als complexos més coneguts.

Filtració de Čech Donat un conjunt de punts en un espai mètric, afegim una bola de radi r a cada punt. Per definir els símplexs de cada pas, considerem la intersecció mútua entre boles i, aleshores, definim un $(k - 1)$ -símplex quan la intersecció de k boles de radi r és no buida. A mesura que anem incrementant el radi r tindrem més símplexs de grau superior fins que tots estiguin interconnectats. El radi r de les boles és el paràmetre de la filtració; en podeu veure un petit exemple a la figura 5.

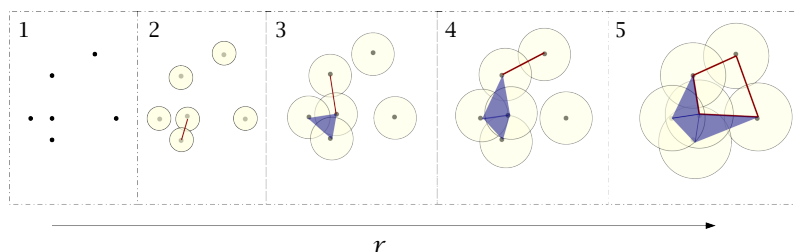


FIGURA 5: Filtració mitjançant el complex de Čech. Els passos a la filtració són determinats per la *distància llindar* entre punts, que seria el radi de la bola considerada a l'entorn de cada punt.

La *filtració de Rips-Vietoris* és definida d'una manera similar a la filtració via els complexos de Čech. La diferència rau en el fet que, en aquest cas, considerem que tenim un $(k - 1)$ -símplex si hi ha k boles de radi r que tenen intersecció no buida dues a dues. Aquest fet redueix el cost computacional ja que només ens cal saber les distàncies entre punts dos a dos.

De la mateixa manera, a partir d'un graf amb pesos es pot generar una filtració assumint que els pesos de cada aresta representen la distància entre nodes; és a dir, la funció de filtració seria la funció de pesos a les arestes. Aquests pesos seran modificats o transformats segons ens convingui per tal de generar la filtració volguda, i en el sentit que ens convingui més, ja que poden ser correlacions o altres mesures que ens interessi tenir en compte per a analitzar les dades. En podem veure un exemple a la figura 6. Observem que fer la filtració de Rips-Vietoris en un graf seria equivalent a considerar les cliques del graf en funció dels seus pesos. Això ens determinaria la mateixa filtració. Cal remarcar que, en aquest cas, estem usant la definició de complex simplicial abstracte ja que els nodes no tenen una realització a $\mathcal{R}^2$.

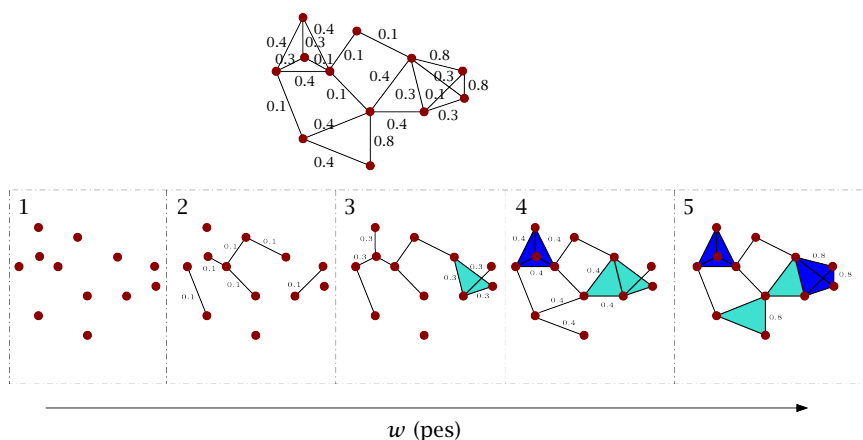


FIGURA 6: Filtració via un complex de cliques donada una xarxa amb pesos. Els passos a la filtració són determinats pels pesos a les arestes del graf donat.

Tot i que les filtracions a partir dels complexos de Čech i Rips-Vietoris són les més naturals, a mesura que el nombre de punts d'entrada augmenta, la complexitat en el càlcul d'aquests complexos es dispara. Normalment es prefereix usar el complex de Rips-Vietoris, en comptes del de Čech, ja que el seu càlcul té un cost computacional més baix.²

Ara bé, hi ha maneres més eficients de generar un complex simplicial, com ara via els complexos α i els *complexos testimoni* (*witness complexes*) [34]. També, Zomorodian ([98]) va introduir els conjunts *endreçats*, que consisteix a crear un conjunt simplicial minimal capaç de capturar la topologia del complex simplicial original. Una altra aproximació dispersa (*sparse*), que redueix la complexitat d'una filtració d'un complex simplicial en un espai mètric n -dimensional, és la proposada per Sheehy [88] i Dey *et al.* [37].

² Cal notar que, fixat un radi, la cardinalitat del complex de Rips-Vietoris és major que la de Čech, però, tot i això, usar el complex de Rips-Vietoris és computacionalment més econòmic ja que només cal calcular les interseccions dos a dos.

3.4 Invariants topològics: *barcodes* i diagrames de persistència

El càlcul de l'homologia persistent sobre una filtració proporciona invariants topològics, multiconjunts de punts a $\mathbb{R}^2$, que poden ser representats segons el que ens convingui més. Parlarem dels diagrames de persistència i dels codis de barres (*barcodes*), unes representacions completament equivalents.

L'homologia persistent, tal com està definida, se centra en els cicles de dimensió n que viuen al llarg dels intervals definits per la filtració i assigna un valor de rellevància proporcional a la llargada d'aquests intervals. És a dir, el rang de la imatge de l'aplicació $H_n(X^i) \rightarrow H_n(X^j)$ és el nombre de classes d'homologia de dimensió n independents que neixen al complex X^i o abans d'aquest, i encara *viuen* (existeixen) al complex X^j . Això inclou les classes anomenades *essencials*, que són aquelles que no moren al final de la filtració. D'aquesta manera, podem definir tant el codi de barres [50] com el conjunt d'intervals que representa cadascuna de les classes d'homologia persistent a través d'un interval $(i, i + p)$, on i indica el pas de la filtració en què aquest generador ha aparegut per primer cop (diem que hi ha *nascut*), i $i + p$, el pas en què ha deixat d'existir (diem que hi ha *mort*); p indicaria la seva persistència en termes absoluts al llarg de la filtració. Per a més detalls, es pot consultar l'article de Zomorodian i Carlsson [99], en el qual es defineix de manera més precisa què representen aquests intervals (o *barres*), que correspondrien a les classes d'homologia graduada [61]. Gràficament, tal com es pot veure a la figura 7, aquests intervals es representen com a barres horitzontals amb coordenades a l'eix horitzontal $(i, i + p)$ i altura lliure; és a dir, a l'eix vertical es representen, en ordre arbitrari, els generadors homològics.

Una altra manera de representar la mateixa informació és amb un *diagrama de persistència* (PD) (ens referirem a $PD(X)$ com el diagrama de persistència del complex simplicial X), que consisteix en un multiconjunt de parelles d'índexs referents a la filtració que representen el *naixement* i la *mort* per a cadascuna de les classes d'homologia persistent representades al pla xy (on l'eix horitzontal acostuma a representar el punt de naixement, mentre que l'eix vertical representa el punt de mort, tal com es pot veure a la figura 8).

Notem que, normalment, si una classe essencial neix a X^i , aleshores es representa amb el punt (i, ∞) en el diagrama de persistència o en el codi de barres.

Cal remarcar, també, que, fixat un pas i a la filtració, si fem un tall en aquell pas tant en un PD com en un codi de barres, el nombre de punts o intervals que tallem és igual al corresponent nombre de Betti al pas i de la filtració. D'aquesta manera, podem dir que el paràmetre de filtració ens proporciona una versió parametritzada dels nombres de Betti.

Tant els diagrames de persistència com els codis de barres es poden definir per a cada dimensió d'homologia que vulguem estudiar. És a dir, podem tenir un PD per als grups d'homologia de dimensió 0 (l'evolució de les components connexes), de dimensió 1 (l'evolució dels cicles), de dimensió 2 (l'evolució de les cavitats), i, anàlogament, per a dimensions superiors.

Observem que els PD i els codis de barres són equivalents: només cal convertir l'interval (i, j) dels codis de barres al corresponent punt en $\mathbb{R}^2$ amb

coordenades (i, j) . Podeu veure un exemple tant de codi de barres com de diagrama de persistència a les figures 7 i 8, respectivament.

Intuïtivament, podem dir que aquells n -cicles que *viuen o sobreviuen* durant més temps tenen més significació i caracteritzen millor l'espai topològic inicial que aquells que *viuen* durant intervals de temps curts, que, sovint, només representen soroll a les dades.

Codis de barres

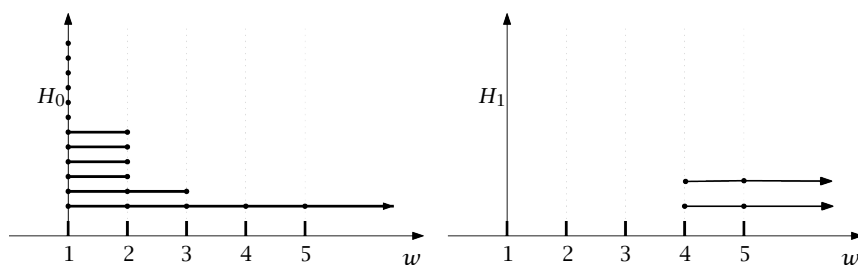


FIGURA 7: Codis de barres per a H_0 i H_1 produïts a partir de la filtració de la figura 6. L'eix horitzontal indica el pas a la filtració, que, en aquest cas, ve donat pels pesos a les arestes del graf inicial.

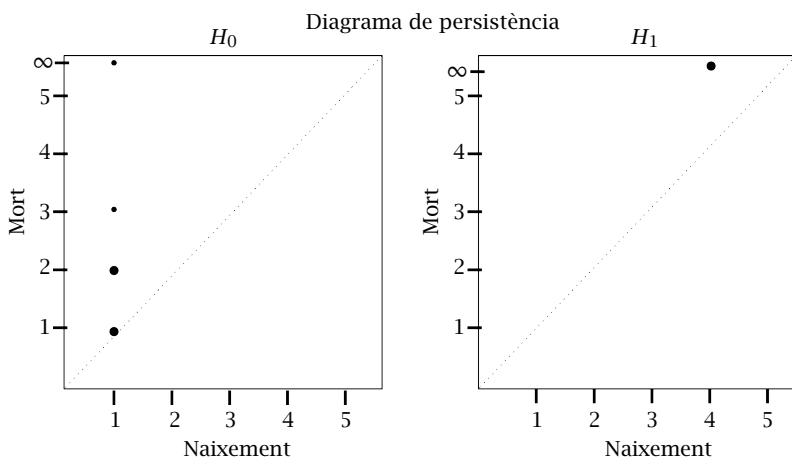


FIGURA 8: Codis de barres per a H_0 i H_1 produïts a partir de la filtració de la figura 6. L'eix horitzontal indica el pas a la filtració en què s'ha creat l'invariant topològic, mentre que l'eix vertical indica quan deixa d'existir. Els punts més grans intenten representar la multiplicitat en aquell punt, ja que, per exemple, per a H_0 , hi ha moltes components connexes que *neixen i moren* al mateix moment. En aquest cas, l'infinit representa que perdura durant tot el temps de la filtració.

OBSERVACIÓ. Un cop determinada l'homologia persistent, seria molt interessant trobar els generadors del grup n -homològic. És possible trobar un representant de cada classe d'homologia però el problema rau en identificar el generador a les dades originals. En altres paraules, seria molt interessant,

un cop trobat el grup d'homologia de dimensió n , ser capaços de dir on es troba aquell cicle de dimensió n a les dades, però només podem optar per usar un representant del grup d'homologia. Una solució seria trobar tota la classe d'homologia, però a nivell computacional no seria factible per poc que el conjunt de dades fos una mica gran. Respecte aquesta qüestió, hi ha treballs on es troben i s'usen els representants dels generadors del grup d'homologia per a localitzar les característiques topològiques principals (cicles), en particular en l'àmbit de la neurociència [83].

3.5 Comparació entre diagrames de persistència i estabilitat

Ara bé, un cop sabem com podem representar l'homologia persistent mitjançant els invariants topològics, una pregunta natural és: com els podem comparar? Aquesta pregunta ha rebut molta atenció en la darrera dècada atès que, així com els diagrames de persistència són els intermediaris (*proxies*) topològics d'un conjunt de dades, tenim que les distàncies entre diagrames serveixen com a intermediari de similaritat entre conjunts de dades. A més, aquesta informació topològica pot ser usada com a intermediari per a algoritmes d'aprenentatge automàtic [75] i classificació [15]. A la figura 9, podem trobar un exemple que il·lustra la utilitat de la comparació de diagrames de persistència.

I això ens porta a un problema d'aparellament, és a dir, com podem comparar dos multiconjunts de punts. Per a fer-ho, es defineixen les distàncies següents entre dos diagrames de persistència, una de les quals s'esmentarà a la prova d'estabilitat dels diagrames de persistència (vegeu la subsecció 3.6).

Donats dos diagrames de persistència $PD(X)$ i $PD(Y)$, la *distància q de Wasserstein* (q -Wasserstein d'ara endavant) és definida per [8, 30]:

$$d_q(PD(X), PD(Y)) = \inf_{\nu: PD(X) \rightarrow PD(Y)} \left[\sum_{x \in PD(X)} \|x - \nu(x)\|_\infty^q \right]^{1/q},$$

on ν varia entre totes les bijeccions.³ La *distància de coll d'ampolla* (*bottleneck distance*), d_∞ o també anomenada d_B , és definida per [29, 45]

$$d_\infty(PD(X), PD(Y)) = \inf_{\nu: PD(X) \rightarrow PD(Y)} \sup_{x \in PD(X)} \|x - \nu(x)\|_\infty.$$

Observem que la distància de coll d'ampolla és un cas especial de la distància q -Wasserstein, (d_q , on $q \rightarrow \infty$). Tot i que siguin distàncies ben definides, tenim el problema del seu càlcul real atès que ens trobem davant d'un problema d'aparellament, on hem de tenir en compte un nombre no trivial de bijeccions possibles entre $PD(X)$ i $PD(Y)$. Aquest càlcul, malgrat que els algoritmes d'aparellament acostumen a reduir l'espai de cerca, sol ser feixuc a mesura que creix la dimensió del multiconjunt (és a dir, el nombre de punts que forma el diagrama de persistència). Al treball de Kerber, Morozov *et al.* podem trobar alguns exemples d'implementacions [63].

³ Si els cardinals de $PD(X)$ i de $PD(Y)$ són diferents, s'igualen afegint punts al diagrama amb cardinal menor.

D'altra banda, tot i ser distàncies ben definides (el conjunt de codis de barres genera de forma natural la distància de Wasserstein), desafortunadament, l'espai resultant no és complet (és només un espai mètric), fet pel qual no és adient per a fer inferència estadística (no tenim una mitjana única) [73]. Per això, s'han introduït diferents transformacions dels diagrames de persistència o dels codis de barres per a poder usar-los com a característiques d'entrada d'altres algoritmes, o bé, per a extreure'n informació estadística.

A continuació, presentem algunes d'aquestes transformacions i donem referències sobre d'altres que han anat derivant de les propostes inicials.

3.5.1 Distància via nuclis Per una banda, tenim mètodes que ens permeten treballar en espais de Hilbert via *funcions de nucli* [84, 18, 66, 24, 65]. Això és molt útil per a poder aplicar algoritmes com ara màquines de vector de suport (*support vector machines*, SVM) o anàlisi de components principals (*principal component analysis*, PCA) directament.

Uns dels primers a proposar un nucli estable com a solució per a treballar en un espai de Hilbert van ser Reininghaus *et al.* [84].

Recordem que, donat un conjunt X , una funció $k: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ és un *nucli* (*kernel*) si existeix un espai de Hilbert $\mathcal{H}$ i una aplicació $\phi: X \rightarrow \mathcal{H}$, anomenada *aplicació característica* (*feature map*), tal que

$$k(x, y) = \langle \phi(x), \phi(y) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall x, y \in X.$$

Equivalentment, k és un nucli si es pot representar matricialment com una matriu simètrica i definida positiva. Un dels principals avantatges dels nuclis és que permeten anar a espais de grans dimensions, $\mathcal{H}$, a dividir les dades (i després classificar-les) sense conèixer explícitament ϕ . A més, els nuclis permeten passar d'espais *estranys* (grafs, diagrames de persistència, cadenes...) a espais de Hilbert on podem treballar molt més fàcilment i dividir les dades i classificar-les. Més en concret, tenim el nucli proposat per Reininghaus *et al.* el 2015, tal que, donats dos conjunts de punts corresponents a dos diagrames de persistència $PD(X)$, $PD(Y)$, definim:

$$K_{\sigma}(PD(X), PD(Y)) = \frac{1}{8\pi\sigma} \sum_{p \in PD(X), q \in PD(Y)} e^{-\frac{\|p-q\|^2}{8\sigma}} - e^{-\frac{\|p-\hat{q}\|^2}{8\sigma}},$$

on $\hat{q} = (q_2, q_1)$ si $q = (q_1, q_2)$, σ és el paràmetre d'escala relacionat amb la mida dels passos a la filtració.

Aquest nucli ens indica que, a mesura que K_{σ} tendeix a zero, la distància entre els diagrames de persistència va augmentant. Una idea intuïtiva de com funciona consisteix en imaginar-se una distribució gaussiana sobre cada punt del diagrama de persistència i *restar* un diagrama de l'altre, on el paràmetre σ actua com a resolució per a definir quan dos punts són iguals o no.

Altres treballs on es defineixen i es treballen diferents nuclis es troben a [18, 66, 24, 65]. De la mateixa manera que havíem parlat de l'homologia d -persistent (vegeu la subsecció 3.2.1), també hi ha el multinucli per a aquesta homologia multiparamètrica [32].

3.6 Estabilitat dels diagrames de persistència

En les seccions anteriors hem vist que l'homologia persistent descriu, mitjançant invariants topològics, les característiques multiescala d'un espai topològic. També hem vist que els diagrames de persistència, un exemple de com es pot codificar la informació de l'homologia persistent, són un multiconjunt de punts a $\mathbb{R}^2$. Així mateix, hem descrit diverses formes i mètriques per a comparar una parella de diagrames de persistència. Ara bé, si pertorbem una mica l'espai inicial (ja sigui donat per un conjunt de punts a $\mathbb{R}^n$ com per un graf amb pesos), canvia això el resultat de l'homologia persistent?

Per tal que els diagrames de persistència puguin ser ben interpretats i també usats com a característica d'un espai topològic, cal que siguin robustos a pertorbacions petites. Hem de pensar que, en l'aplicació de l'homologia persistent, les nostres dades poden tenir soroll o potser, no volem que depenguin de la mostra que agafem. Per això, els resultats sobre l'estabilitat dels diagrames de persistència són molt rellevants. La primera prova d'estabilitat va ser donada per Cohen-Steiner i els seus col·laboradors [29].

La prova (no entrarem en el detall) es basa a mostrar l'estabilitat dels diagrames de persistència d'una funció que indueix una filtració sobre un espai topològic X . A grans trets, la prova mostra que, donades dues funcions (*tame*), f i g , tals que $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, on X és un espai topològic i les dues funcions són filtracions de X , aleshores, si la distància L_∞ entre elles és petita, la distància (usant la distància de coll d'ampolla d_B) entre els corresponents diagrames de persistència $PD(f, X)$ i $PD(g, X)$, també ho serà. Aquí $PD(f, X)$ i $PD(g, X)$ fan referència al diagrama de persistència obtingut usant les respectives funcions de filtració sobre l'espai topològic X . És a dir, per a cada dimensió p , tenim que el resultat principal ve donat per

$$d_B(PD(f, X), PD(g, X)) \leq \|f - g\|_\infty. \quad (1)$$

De la mateixa manera, obtenim una intuïció geomètrica d'estabilitat en diagrames de persistència gràcies al resultat següent [23], on es pot veure que, donats dos subconjunts de punts X i Y en un espai mètric (M, d_M) , aleshores els diagrames de persistència⁴ corresponents a X i Y satisfan:

$$d_B(PD(X), PD(Y)) \leq d_H(X, Y), \quad (2)$$

on d_H és la distància de Hausdorff definida sobre dos conjunts de punts X i Y ; és a dir,

$$d_H(X, Y) = \max\{\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d_M(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d_M(x, y)\}.$$

Podem trobar un exemple d'aquest tipus d'estabilitat a la figura 9.

Existeixen altres treballs que mostren l'estabilitat dels diagrames de persistència, com els de Chatzal *et al.* i Frosini [26, 22, 48].

⁴ Observem que les cardinalitats de $PD(X)$, $PD(Y)$ són iguals considerant el conjunt de punts de la diagonal amb multiplicitat infinita.

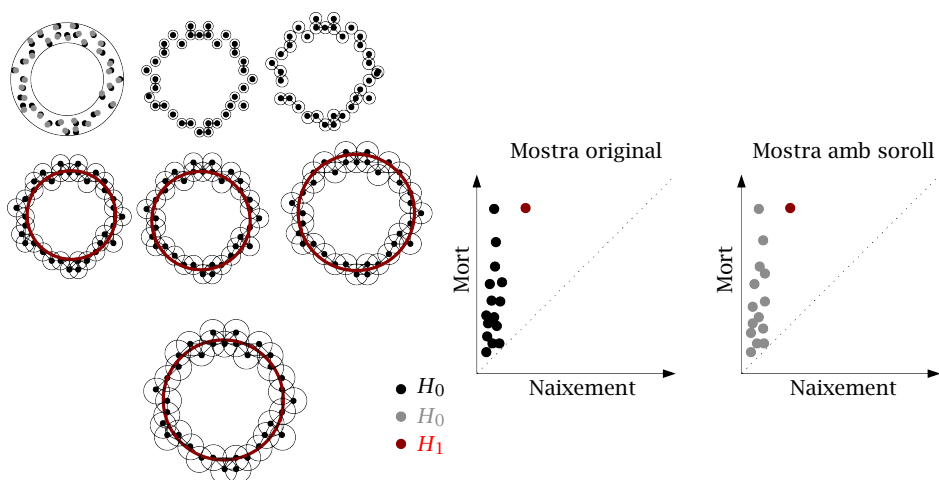


FIGURA 9: Il·lustració d'estabilitat: dades originals (punts negres), X , dades amb soroll (punts blaus), Y . Dues mostres diferents generen dos conjunts de punts diferents, (X, Y) , a partir dels quals es calcula l'homologia persistent via una filtració de Čech i obtenim els diagrames de persistència mostrats a la figura central ($PD(X)$) i dreta ($PD(Y)$). La possibilitat de poder comparar diagrames de persistència permet dir que els dos conjunts de dades representen el mateix espai topològic. En aquesta il·lustració, a més, podem veure que les formes principals (en aquest cas, un cercle) determinants del nostre espai són presents al llarg de més passos de la filtració. En aquest cas, es mostren els diagrames de persistència per a H_0 i H_1 en el mateix gràfic. Al diagrama de l'esquerra s'observa que hi ha una component connexa principal i un cycle (de dimensió 1) principal sobre el mostreig de les dades originals, X , mentre que el diagrama de persistència de la dreta correspon a un mostreig de les dades amb una petita pertorbació, Y . Tant la mostra original com la mostra amb soroll produeixen diagrames de persistència similars, és a dir, tindrien una distància entre ells baixa, o bé una similitud alta.

3.7 Altres transformacions sobre els resultats en homologia persistent

3.7.1 Paisatges persistents (*persistent landscapes*, PL) Una de les transformacions més primerenques va ser la proposada per Bubenik el 2012 [11, 10]. Els *paisatges persistents* es desenvolupen per a construir funcions lineals a trossos a partir dels diagrames de persistència (PD) per a poder-hi fer anàlisi de dades *a posteriori* (vegeu-ne un exemple a la figura 10). El paisatge persistent és el conjunt de funcions $\{\lambda_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}_{k \in \mathbb{N}}$, on definim $\lambda_k(t)$ com el k -èsim valor més gran del conjunt de números

$$\{\max(\min(t - a_i, b_i - t), 0)\}_{i=1}^n,$$

on (a_i, b_i) són punts del PD, per a $i \in \{1, \dots, n\}$. Això ens permet estendre una funció de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$, de manera que obtenim un espai de funcions separable

(en aquest cas, un espai de Banach), i així podem fer inferència estadística dins d'aquest espai. Definint la p -distància entre dos paisatges persistents, λ i λ' , com $\|\lambda - \lambda'\|$, es pot demostrar que és estable respecte a la norma del suprem [10].

A la figura 10 il·lustrem les transformacions que experimenta un diagrama persistent fins a esdevenir un paisatge persistent. Aquestes representacions van ser també estudiades per Chazal [25].

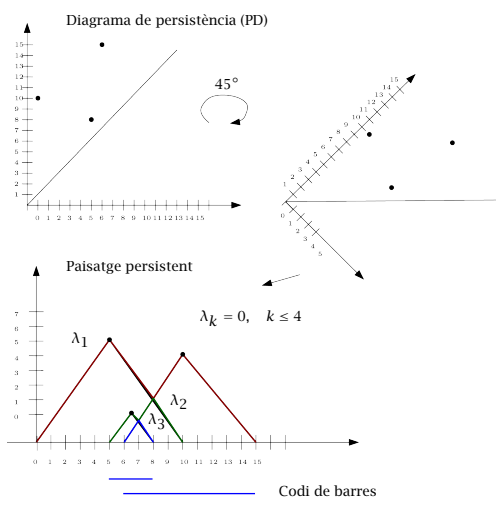


FIGURA 10: Exemple de transformació d'un diagrama de persistència (PD) en un paisatge persistent (PL). Aquesta transformació ens permet passar d'un multiconjunt a un conjunt de funcions lineals a trossos on es pot treballar estadísticament.

3.7.2 Vectoritzacions Consisteixen a vectoritzar directament el diagrama de persistència en un espai euclidià, tal com es fa, per exemple, amb les *imatges persistents* (*persistent images*, PI) [1]. En aquest cas, la vectorització es duu a terme de la forma següent: es construeix una representació en $\mathbb{R}^n$ integrant la densitat estimada d'un diagrama de persistència en una superfície. En altres paraules, creen l'anomenada *superfície persistent* a partir dels diagrames de persistència prenent la suma ponderada de gaussians centrades a cada punt del diagrama de persistència. Es creen uns vectors, anomenats *imatges persistents*, integrant la superfície persistent sobre una graella. Això permet aplicar les tècniques d'aprenentatge automàtic per a espais vectorials finits. Es demostra que les imatges persistents són estables respecte a la distància 1-Wasserstein entre diagrames de persistència [1], i que es poden concatenar diagrames de persistència de dimensions diverses en un únic vector, de manera que permet tenir en compte diferents dimensions d'homologia de cop. Les imatges persistents s'han analitzat des del punt de vista estadístic en un treball de Chen *et al.* [28].

Troblem altres exemples de vectoritzacions a [3], on es modelen els diagrames de persistència com una funció de probabilitat bidimensional a l'espai vectorial tangent d'una varietat riemanniana, així com una proposta per a ser usada en xarxes neurals profundes [59] o una transformació dels diagrames de persistència en polinomis complexos [40], fet que permet treballar directament a l'espai de funcions dels polinomis.

3.7.3 Vinyars D'altra banda, Cohen-Steiner i els seus col·laboradors ([31]) van definir el concepte de *vinyar* (*vineyard*), que, en poques paraules, són diagrames de persistència que varien en el temps. Atès que podem tenir problemes allà on el nostre espai topològic i el complex simplicial variïn en el temps, i potser volem saber com varien, es van definir els vinyars, que consisteixen a seguir les trajectòries dels punts d'un diagrama de persistència inicial al llarg del temps.

Donat un conjunt de punts dinàmic a l'espai $\mathbb{X}(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$, obtenim el corresponent conjunt de diagrames de persistència $PD(\mathbb{X}(t))$ per a cada temps t . Aquest paràmetre *temps* és l'anomenat *vinyar*; cada punt $p \in PD(\mathbb{X}(t))$ per sobre de la diagonal es mou al llarg del temps traçant una corba, que s'anomena *vinya* (*vine*).

3.8 Programari per al càlcul de l'homologia persistent

De la mateixa manera que hem mencionat les dificultats de generar un complex simplicial a gran escala i la filtració corresponent, un altre àmbit en el qual s'ha treballat intensament els darrers anys és el del càlcul de l'homologia persistent des del punt de vista pràctic. L'algoritme clàssic del càlcul de l'homologia persistent es basa en la reducció de la matriu de l'operador vora [44]. Podem trobar propostes de millora en l'algoritme en els treballs de Milosavljević [74], Chen [27], Lewis [70] i Boissonnat [9], per posar-ne uns quants exemples; a més dels treballs de Bauer i els seus col·laboradors [4, 6, 5], que proposen un algoritme paral·lelitzable en què divideixen el complex simplicial sobre el qual es calcula l'homologia persistent. A [79] podem trobar una anàlisi prou recent i més completa dels diferents algorismes i programari que existeixen.

Un dels programes més coneguts i usats és l'anomenat *Ripser* [94], un dels més antics és *Eirene* [58] i un dels més actuals és *Giotto* [92]. Segurament, ens n'estem deixant uns quants més, ja que en els últims cinc anys hi ha hagut molts avenços pel que fa a la implementació de l'algoritme per al càlcul de l'homologia persistent.

D'altra banda, per a l'homologia d -persistent, el 2015 va aparèixer *RIVET* [93] per al càlcul i la visualització dels diagrames de persistència bidimensionals (vegeu la subsecció 3.4), gràcies al treball de Lesnick i Wright [69].

4 L'algoritme Mapper

D'altra banda, trobem un altre tipus d'algoritme molt diferent dels que calculen l'homologia persistent que té en compte la topologia de les dades, però d'una altra manera que expliquem a continuació. Es tracta de l'algoritme anomenat

Mapper, que va ser introduït per Singh, Mémoli i Carlsson el 2007 [89] i popularitzat i implementat els cinc anys següents.⁵ A grans trets, donada una funció de clusterització, l'algoritme genera un graf esquelet on es codifica la interacció entre els clústers detectats.

Els complexos de Čech són un cas particular de famílies de complexos associades a recobriments oberts en el cas d'espais topològics. Donat un recobriment, $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ d'un espai topològic $\mathbb{M}$, és a dir, una família de conjunts U_i tal que $\mathbb{M} = \cup_{i \in I} U_i$, el *nervi* de $\mathcal{U}$ és el complex simplicial abstracte $C(\mathcal{U})$ que té per vèrtexs els conjunts U_i i tal que

$$\sigma = [U_{i_0}, \dots, U_{i_k}] \text{ és un simplex de } C(\mathcal{U}) \text{ si i només si } \bigcap_{j=0}^k U_{i_j} \neq \emptyset.$$

Donat un recobriment, cada element del recobriment pot representar un clúster local o un grup de punts que comparteixen alguna característica comuna. El nervi ens dona una descripció compacta i global de la relació entre aquests conjunts U_i i els seus patrons d'intersecció; en podem veure un exemple a la figura 11. Usar els recobriments de nervi com una manera de compactar informació i visualitzar-la va ser la idea inicial de l'algoritme *Mapper*.

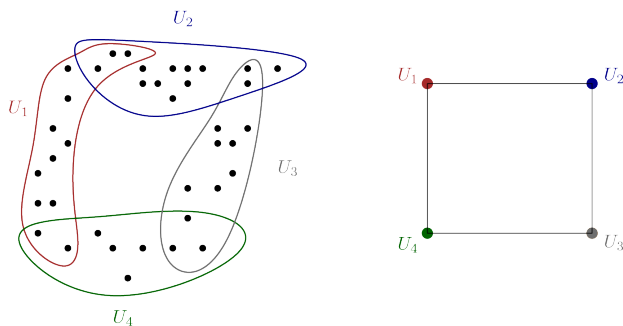


FIGURA 11: Nervi d'un recobriment sobre un conjunt de punts en el pla.

Sigui $f: X \rightarrow \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, una funció contínua amb valors reals, i sigui $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recobriment de $\mathbb{R}^d$. El recobriment a partir del *pull back* de X induït per $(f, \mathcal{U})$ és la col·lecció de conjunts oberts $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$. El *pull back* refinat és la col·lecció de components connexes dels conjunts oberts $f^{-1}(U_i)$, $i \in I$.

La idea de l'algoritme *Mapper* és, donat un conjunt de dades $\mathbb{X}$ i una funció *ben triada* sobre els valors reals $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^d$, resumir $\mathbb{X}$ a través del nervi del *pull back* refinat d'un recobriment de $\mathcal{U}$ de $f(\mathbb{X})$. Per a recobriments ben triats, el nervi correspon a un graf, una manera fàcil i útil de visualitzar les dades resumidament. Vegeu-ne una il·lustració a la figura 12.

⁵ En aquest mateix període, els autors de l'algoritme van crear una empresa per a explotar-lo a nivell comercial.

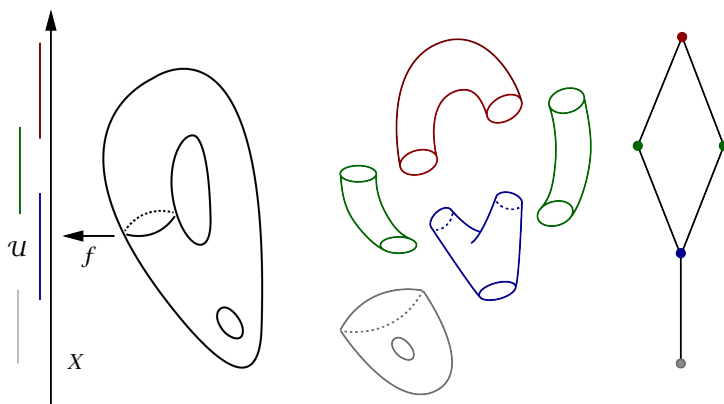


FIGURA 12: Recobriment refinat del *pull back* sobre la funció altura a una superfície a $\mathbb{R}^3$ i el nervi corresponent en forma de graf.

D'aquesta manera, la part més important és escollir la funció f , que serà la nostra funció de filtratge o clusterització i que triarem en funció de l'aspecte de les dades $\mathbb{X}$ que vulguem inspeccionar. D'altra banda, cal escollir bé el recobriment $\mathcal{U}$ de $f(\mathbb{X})$ i, després, fer una bona clusterització de les dades $f^{-1}(U)$ en clústers, $C_{u,iu}$, a partir dels quals calcularem el nervi. Normalment s'usa un paràmetre de resolució per a determinar quan s'intersequen dos elements del recobriment.

Podem trobar anàlisis d'estabilitat del *Mapper* en els treballs [19, 20], mentre que la inestabilitat ha estat estudiada per Dey *et al.* [38, 39]. De la mateixa manera que trobem programari o llibreries en Python per a usar de manera pràctica l'homologia persistent, també existeixen implementacions del *Mapper* en Python [95]. Remarquem, també, que l'algoritme *Mapper* va esdevenir una companyia i l'algoritme va ser semiprivat durant un temps.

5 Aplicacions i evolució de la TDA versus el ML

Al llarg de les seccions precedents, d'una banda, hem introduït l'homologia persistent, les seves propietats i la manera de codificar-ne la informació resultant mitjançant els diagrames de persistència o els diagrames de barres; de l'altra, hem vist que l'espai dels diagrames de persistència no sempre és l'adient si volem usar-ne la informació com a paràmetres d'entrada, per exemple, en algorismes de classificació d'aprenentatge automàtic. A la subsecció 3.5 hem vist que existeix un conjunt de transformacions que ens permeten passar d'un espai amb *mal comportament* a d'altres amb els quals podem *fer estadística* (vegeu la figura 13). A continuació, es mostren diversos exemples, en àmbits molt variats, en què s'ha aplicat l'homologia persistent com una eina per a extreure informació d'un conjunt de dades, normalment sorolloses.

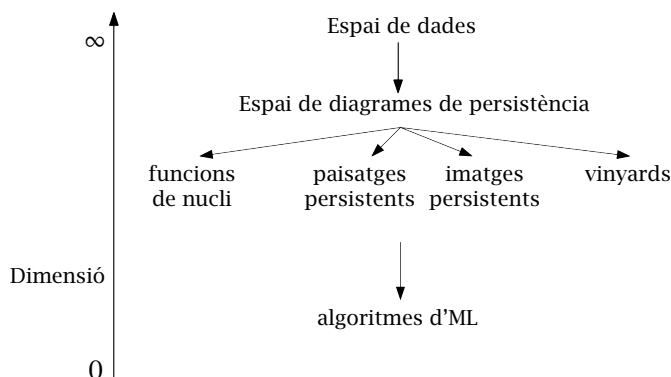


FIGURA 13: Esquema de la possible evolució d'una anàlisi de dades via l'homologia persistent. Les dades inicials acostumen a viure en un espai de dimensió elevada. L'homologia persistent permet comprimir la informació de les dades a $\mathbb{R}^2$ i, mitjançant algunes transformacions, es poden usar els resultats de l'homologia persistent com a dades d'entrada d'algoritmes d'aprenentatge automàtic.

Una de les primeres aplicacions de l'homologia persistent com una eina per a classificar imatges la trobem a [71]. En aquest cas, s'arriba a una millora de la classificació d'imatges gràcies a la combinació de l'ús dels diagrames de persistència i la tècnica de *BoF* (*bag-of-features*) per a la classificació de dades.

D'altra banda, Yoo *et al.* ([97]) van utilitzar els vinyars per a determinar propietats dinàmiques temporals del cervell sense imposar cap llindar a les dades i d'una manera robusta. Més concretament, determinen tasques específiques de connectivitats funcionals a partir de dades d'electroencefalogrames; comparen els resultats obtinguts amb altres metodologies, com la PCA, i altres mesures de xarxes. Els vinyars són la tècnica més robusta, sense que calgui imposar un llindar temporal a les xarxes d'entrada.

En trobem altres aplicacions en el camp de l'anàlisi de les sèries temporals [82], ja sigui en l'àmbit de la genètica [81, 21] o utilitzant els paisatges persistents per a analitzar sèries temporals en economia [51]. També n'existeixen en l'àmbit de la ciència dels materials [68]. En el camp de les imatges mèdiques, s'han tractat problemes de classificació emprant o bé la distància de coll d'ampolla [2] o bé imatges persistents [1], i s'ha pogut estudiar l'arbre que formen les artèries cerebrals [7].

La neurociència —i, més concretament, la classificació del tipus de xarxes (o grafs)— és un dels camps on més s'ha anat introduint l'ús de la topologia persistent [33, 90]. Amb l'ús dels nuclis, trobem aplicacions tant en la classificació d'imatges [84] (on es millora la taxa de classificació en comptes d'usar els paisatges persistents), com en la neurociència [60].

Entre el 2015 i el 2020, el nombre de treballs en els quals s'usa l'homologia persistent com una eina per a l'ús i la classificació de dades ha augmentat d'una

manera significativa i, a banda de les referències citades en aquest article, se'n poden trobar moltes més.

Així mateix l'homologia persistent ha contribuït a millorar o entendre més bé les xarxes neuronals convolucionals (*convolutional neural networks*, CNN). Per exemple, els treballs de Guss i Salakhutdinov [54] i de Rieck *et al.* [85] proposen una mesura de complexitat per a les arquitectures de xarxes neuronals basades en TDA, i en un nou treball de Carlsson i Gabrielsson [13] es pot veure que, aplicant eines topològiques a les xarxes convolucionals profundes (*deep convolutional networks*), milloren els càlculs d'aquestes xarxes. D'altra banda, Naitzat *et al.* ([78]) revelen intuïcions sobre com es comporten les xarxes respecte a la topologia de les dades d'entrada en funció de la seva profunditat. Podeu trobar més informació sobre homologia persistent i aprenentatge profund a [76].

Pel que fa a l'algoritme *Mapper*, en trobem algunes aplicacions a [72, 96, 89] en diferents camps, des de la medicina fins a la política i els esports.

6 Conclusions i remarques

Segurament aquesta revisió es deixa moltes referències, però, si més no, esperem que a partir de les que es faciliten el lector pugui trobar aquelles que més li interessin, tant des d'un punt de vista teòric com pràctic. Així mateix, esperem que aquest resum de la TDA contribueixi a la difusió d'aquestes tècniques *recents* d'anàlisi de dades sense demanar al lector gaire coneixements previs d'àlgebra o de teoria d'homologia. La intenció ha estat escriure un treball per a tots els públics, de manera que qualsevol matemàtic de qualsevol àmbit —tant si és dins la recerca com si no— pugui seguir i entendre les idees principals de l'homologia persistent i l'algoritme *Mapper*, així com la importància que té com una eina nova que es pot emprar en camps com l'aprenentatge automàtic i la intel·ligència artificial.

Agraïments

Vull agrair a Miguel Teixidó el seu suport, els seus suggeriments i la seva dedicació com a revisor *personal*. També cal dir que aquest treball ha estat escrit per tres persones —una, jo mateixa, i dues que, al llarg de l'escriptura d'aquest manuscrit, han estat (i estan) creixent dins meu. Finalment, vull donar les gràcies a totes les persones de la Societat Catalana de Matemàtiques que any rere any treballen per fer possible aquesta publicació.

En l'àmbit institucional, vull agrair el suport d'Intesa Sanpaolo Innovation Center (Torí, Itàlia) i de la ISI Foundation (Torí, Itàlia).

Referències

- [1] ADAMS, H.; EMERSON, T.; KIRBY, M.; NEVILLE, R.; PETERSON, C.; SHIPMAN, P.; CHEPUSHTANOVA, S.; HANSON, E.; MOTTA, F.; ZIEGELMEIER, L. «Persistence

- images: a stable vector representation of persistent homology». *J. Mach. Learn. Res.*, 18 (2017), article núm. 8, 35 p.
- [2] ADCOCK, A.; RUBIN, D.; CARLSSON, G. «Classification of hepatic lesions using the matching metric». *Comput. Vision Image Understanding*, 121 (2014), 36–42.
 - [3] ANIRUDH, R.; VENKATARAMAN, V.; NATESAN RAMAMURTHY, K.; TURAGA, P. «A Riemannian framework for statistical analysis of topological persistence diagrams». A: *Proceedings of the 2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops (CVPRW)*, 2016, 1023–1031.
 - [4] BAUER, U.; KERBER, M.; REININGHAUS, J. «Distributed computation of persistent homology». A: *Proceedings of the Meeting on Algorithm Engineering & Experiments*. Filadèlfia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014, 31–38.
 - [5] BAUER, U.; KERBER, M.; REININGHAUS, J. «Clear and compress: Computing persistent homology in chunks». A: BREMER, P. T.; HOTZ, I.; PASCUCCI, V.; PEIKERT, R. (ed.). *Topological Methods in Data Analysis and Visualization III*. Cham: Springer, 2014, 103–117.
 - [6] BAUER, U.; KERBER, M.; REININGHAUS, J.; WAGNER, H. «Phat—persistent homology algorithms toolbox». *J. Symbolic Comput.*, 78 (2017), 76–90.
 - [7] BENDICH, P.; MARRON, J. S.; MILLER, E.; PIELOCH, A.; SKWERER, S. «Persistent homology analysis of brain artery trees». *Ann. Appl. Stat.*, 10 (1) (2016), 198–218.
 - [8] BERTSEKAS, D. P. «The auction algorithm: a distributed relaxation method for the assignment problem». *Ann. Oper. Res.*, 14 (1–4) (1988), 105–123.
 - [9] BOISSONNAT, J.-D.; DEY, T. K.; MARIA, C. «The compressed annotation matrix: an efficient data structure for computing persistent cohomology». *Algorithmica*, 73 (3) (2015), 607–619.
 - [10] BUBENIK, P. «Statistical topological data analysis using persistence landscapes». *J. Mach. Learn. Res.*, 16 (2015), 77–102.
 - [11] BUBENIK, P.; DŁOTKO, P. «A persistence landscapes toolbox for topological statistics». *J. Symbolic Comput.*, 78 (2017), 91–114.
 - [12] CARLSSON, G. «Topology and data». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 46 (2) (2009), 255–308.
 - [13] CARLSSON, G.; GABRIELSSON, R. B. «Topological approaches to deep learning». A: BAAS N. A.; CARLSSON, G. E.; QUICK, G.; SZYMIK, M.; THAULE, M. (ed.). *Topological Data Analysis*. Cham: Springer, 2020, 119–146. (Abel Symposia)
 - [14] CARLSSON, G.; ISHKHANOV, T.; DE SILVA, V.; ZOMORODIAN, A. «On the local behavior of spaces of natural images». *Int. J. Comput. Vis.*, 76 (1) (2008), 1–12.

- [15] CARLSSON, G.; JARDINE, R.; FEICHTNER-KOZLOV, D.; MOROZOV, D. [et al.]. «Topological data analysis and machine learning theory». Tech. Rep. 12w5081, Banff Inter. Res. Station Math. Innov. Disc (2012).
- [16] CARLSSON, G.; SINGH, G.; ZOMORODIAN, A. «Computing multidimensional persistence». A: *Algorithms and Computation*. Berlin: Springer, 2009. 730–739. (Lecture Notes in Comput. Sci.; 5878)
- [17] CARLSSON, G.; ZOMORODIAN, A.; COLLINS, A.; GUIBAS, L. J. «Persistence barcodes for shapes». *Int. J. Shape Model.*, 11 (2) (2005), 149–187.
- [18] CARRIÈRE, M.; CUTURI, M.; OUDOT, S. «Sliced Wasserstein kernel for persistence diagrams». A: *Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning*. Vol. 17. Sydney, Austràlia, 2017, 664–673.
- [19] CARRIÈRE, M.; MICHEL, B.; OUDOT, S. «Statistical analysis and parameter selection for Mapper». *J. Mach. Learn. Res.*, 19 (2018), article núm. 12, 39 p.
- [20] CARRIÈRE, M.; OUDOT, S. «Structure and stability of the one-dimensional mapper». *Found. Comput. Math.*, 18 (6) (2018), 1333–1396.
- [21] CHAN, J. M.; CARLSSON, G.; RABADAN, R. «Topology of viral evolution». *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 110 (46) (2013), 18566–18571.
- [22] CHAZAL, F.; DE SILVA, V.; GLISSE, M.; OUDOT, S. *The Structure and Stability of Persistence Modules*. Cham: Springer, 2016. (SpringerBriefs in Mathematics)
- [23] CHAZAL, F.; DE SILVA, V.; OUDOT, S. «Persistence stability for geometric complexes». *Geom. Dedicata*, 173 (2014), 193–214.
- [24] CHAZAL, F.; FASY, B.; LECCI, F.; MICHEL, B.; RINALDO, A.; WASSERMAN, L. «Robust topological inference: distance to a measure and kernel distance». *J. Mach. Learn. Res.*, 18 (2017), article núm. 159, 40 p.
- [25] CHAZAL, F.; FASY, B. T.; LECCI, F.; RINALDO, A.; WASSERMAN, L. «Stochastic convergence of persistence landscapes and silhouettes». A: *Computational Geometry (SoCG'14)*. Nova York: ACM, 2014, 474–483.
- [26] CHAZAL, F.; OUDOT, S. Y. «Towards persistence-based reconstruction in Euclidean spaces». A: *Computational Geometry (SCG'08)*. Nova York: ACM, 2008, 232–241.
- [27] CHEN, C.; KERBER, M. «An output-sensitive algorithm for persistent homology». *Comput. Geom.*, 46 (4) (2013), 435–447.
- [28] CHEN, Y.-C.; WANG, D.; RINALDO, A.; WASSERMAN, L. «Statistical analysis of persistence intensity functions». Preprint, 2015. [Disponible en línia a: <https://arxiv.org/abs/1510.02502>]
- [29] COHEN-STEINER, D.; EDELSBRUNNER, H.; HARER, J. «Stability of persistence diagrams». *Discrete Comput. Geom.*, 37 (1) (2007), 103–120.
- [30] COHEN-STEINER, D.; EDELSBRUNNER, H.; HARER, J.; MILEYKO, Y. «Lipschitz functions have L_p -stable persistence». *Found. Comput. Math.*, 10 (2) (2010), 127–139.

- [31] COHEN-STEINER, D.; EDELSBRUNNER, H.; MOROZOV, D. «Vines and vineyards by updating persistence in linear time». A: *Computational Geometry (SCG'06)*. Nova York: ACM, 2006, 119-126.
- [32] CORBET, R.; FUGACCI, U.; KERBER, M.; LANDI, C.; WANG, B. «A kernel for multi-parameter persistent homology». *Comput. Graph.: X*, 2 (2019), 100005.
- [33] CURTO, C. «What can topology tell us about the neural code?». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 54 (1) (2017), 63-78.
- [34] DE SILVA, V.; CARLSSON, G. «Topological estimation using witness complexes». A: *SPBG'04: Proceedings of the First Eurographics conference on Point-Based Graphics*. The Eurographics Association, 2004, 157-166.
- [35] DE SILVA, V.; GHRIST, R. «Coverage in sensor networks via persistent homology». *Algebr. Geom. Topol.*, 7 (2007), 339-358.
- [36] DELFINADO, C. J. A.; EDELSBRUNNER, H. «An incremental algorithm for Betti numbers of simplicial complexes on the 3-sphere». *Grid generation, finite elements, and geometric design. Comput. Aided Geom. Design*, 12 (7) (1995), 771-784.
- [37] DEY, T. K.; FAN, F.; WANG, Y. «Computing topological persistence for simplicial maps [extended abstract]». A: *Computational Geometry (SoCG'14)*. Nova York: ACM, 2014, 345-354.
- [38] DEY, T. K.; MÉMOLI, F.; WANG, Y. «Multiscale mapper: topological summarization via codomain covers». A: *Proceedings of the Twenty-Seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. Nova York: ACM, 2016, 997-1013.
- [39] DEY, T. K.; MÉMOLI, F.; WANG, Y. «Topological analysis of nerves, Reeb spaces, mappers, and multiscale mappers». Preprint, 2017. [Disponibile en línia a: <https://arxiv.org/abs/1703.07387>]
- [40] DI FABIO, B.; FERRI, M. «Comparing persistence diagrams through complex vectors». A: *Image Analysis and Processing—ICIAP 2015. Part I*. Cham: Springer, 2015, 294-305. (Lecture Notes in Comput. Sci.; 9279)
- [41] EDELSBRUNNER, H.; HARER, J. «Persistent homology—a survey». A: *Surveys on Discrete and Computational Geometry*. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2008, 257-282. (Contemp. Math.; 453)
- [42] EDELSBRUNNER, H.; HARER, J. L. *Computational Topology. An Introduction*. Providence, RI: American Mathematical Society, 2010.
- [43] EDELSBRUNNER, H.; LETSCHER, D.; ZOMORODIAN, A. «Topological persistence and simplification». *Discrete and computational geometry and graph drawing (Columbia, SC, 2001)*. *Discrete Comput. Geom.*, 28 (4) (2002), 511-533.
- [44] EDELSBRUNNER, H.; PARSA, S. «On the computational complexity of Betti numbers: reductions from matrix rank». A: *Proceedings of the Twenty-Fifth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. Nova York: ACM, 2014, 152-160.

- [45] EFRAT, A.; ITAI, A.; KATZ, M. J. «Geometry helps in bottleneck matching and related problems». *Algorithmica*, 31 (1) (2001), 1–28.
- [46] FENG, M.; HICKOK, A.; PORTER, M. A. «Topological data analysis of spatial systems». Preprint, 2014. [Disponible en línia a: <https://arxiv.org/abs/2104.00720>]
- [47] FROSINI, P. «Measuring shapes by size functions». A: *Proceedings: Intelligent Robots and Computer Vision X: Algorithms and Techniques*. Vol. 1607. Boston, MA, 1992, 122–133.
- [48] FROSINI, P.; LANDI, C. «Stability of multidimensional persistent homology with respect to domain perturbations». Preprint, 2010. [Disponible en línia a: <https://arxiv.org/abs/1001.1078>]
- [49] FROSINI, P.; MULAZZANI, M. «Size homotopy groups for computation of natural size distances». *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 6 (3) (1999), 455–464.
- [50] GHRIST, R. «Barcodes: the persistent topology of data». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 45 (1) (2008), 61–75.
- [51] GIDEA, M.; KATZ, Y. «Topological data analysis of financial time series: landscapes of crashes». *Phys. A*, 491 (2018), 820–834.
- [52] GIUSTI, C.; GHRIST, R.; BASSETT, D. S. «Two's company, three (or more) is a simplex». *J. Comput. Neurosci.*, 41 (1) (2016), 1–14.
- [53] GREENBERG, M. J. *Algebraic Topology: A first Course*. CRC Press, 2018.
- [54] GUSS, W. H.; SALAKHUTDINOV, R. «On characterizing the capacity of neural networks using algebraic topology». Preprint, 2018. [Disponible en línia a: <https://arxiv.org/abs/1802.04443>]
- [55] HARRINGTON, H. A.; OTTER, N.; SCHENCK, H.; TILLMANN, U. «Stratifying multiparameter persistent homology». *SIAM J. Appl. Algebra Geom.*, 3 (3) (2019), 439–471.
- [56] HATCHER, A. *Algebraic Topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [57] HAUSMANN, J.-C. «On the Vietoris-Rips complexes and a cohomology theory for metric spaces». A: *Prospects in Topology*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1995, 175–188. (Ann. of Math. Stud.; 138)
- [58] HENSELMAN, G.; GHRIST, R. «Matroid filtrations and computational persistent homology». Preprint, 2016. [Disponible en línia a: <https://arxiv.org/abs/1606.00199>]
- [59] HOFER, C.; KWITT, R.; NIETHAMMER, M.; UHL, A. «Deep learning with topological signatures». Preprint, 2017. [Disponible en línia a: <https://arxiv.org/abs/1707.04041>]
- [60] IBÁÑEZ-MARCELO, E.; CAMPIONI, L.; PHINYOMARK, A.; PETRI, G.; SANTAR-CANGELO, E. L. «Topology highlights mesoscopic functional equivalence between imagery and perception: The case of hypnotizability». *NeuroImage*, 200 (2019), 437–449.

- [61] JACOBSON, N. *Lie Algebras*. Nova York: Dover, p. 163, 1979.
- [62] KANNAN, H.; SAUCAN, E.; ROY, I.; SAMAL, A. «Persistent homology of unweighted complex networks via discrete Morse theory». *Sci. Rep.*, 9, article núm. 13817 (2019).
- [63] KERBER, M.; MOROZOV, D.; NIGMETOV, A. «Geometry helps to compare persistence diagrams». *ACM J. Exp. Algorithmics*, 22 (2017), art. 1.4, 20 p.
- [64] KNUDSON, K. P. «A refinement of multi-dimensional persistence». *Homology Homotopy Appl.*, 10 (1) (2008), 259–281.
- [65] KUSANO, G.; FUKUMIZU, K.; HIRAOKA, Y. «Persistence weighted Gaussian kernel for topological data analysis». A: *ICML'16: Proceedings of the 33rd International Conference on International Conference on Machine Learning*. Vol. 48. Nova York: JMLR.org, 2016, 2004–2013.
- [66] KWITT, R.; HUBER, S.; NIETHAMMER, M.; LIN, W.; BAUER, U. «Statistical topological data analysis - A kernel perspective». A: *Advances in Neural Information Processing Systems*. Vol. 28. Curran Associates, Inc., 2015, 3070–3078.
- [67] KYEONG, S.; PARK, S.; CHEON, K.-A.; KIM, J.-J.; SONG, D.-H.; KIM, E. «A new approach to investigate the association between brain functional connectivity and disease characteristics of attention-deficit/hyperactivity disorder: Topological neuroimaging data analysis». *PLoS One*, 10 (9) (2015), 1–15.
- [68] LEE, Y.; BARTHEL, S. D.; DŁOTKO, P.; MOHAMAD MOOSAVI, S.; HESS, K.; SMIT, B. «Quantifying similarity of pore-geometry in nanoporous materials». *Nat. Commun.*, 8, article núm. 15396 (2017).
- [69] LESNICK, M.; WRIGHT, M. «Interactive visualization of 2-D persistence modules». Preprint, 2015. [Disponible en línia a: <https://arxiv.org/abs/1512.00180>]
- [70] LEWIS, R.; MOROZOV, D. «Parallel computation of persistent homology using the blowup complex». A: *Proceedings of the 27th ACM Symposium on Parallelism in Algorithms and Architectures, SPAA '15*. Nova York: ACM, 2015, 323–331.
- [71] LI, C.; OVSJANIKOV, M.; CHAZAL, F. «Persistence-based structural recognition». A: *2014 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. IEEE, 2014, 2003–2010.
- [72] LUM, P. Y.; SINGH, G.; LEHMAN, A.; ISHKANOV, T.; VEJDEMO-JOHANSSON, M.; ALAGAPPAN, M.; CARLSSON, J.; CARLSSON, G. «Extracting insights from the shape of complex data using topology». *Sci. Rep.*, 3, article núm. 1236 (2013).
- [73] MILEYKO, Y.; MUKHERJEE, S.; HARER, J. «Probability measures on the space of persistence diagrams». *Inverse Problems*, 27 (12) (2011), 124007, 22 p.
- [74] MILOSAVLJEVIĆ, N.; MOROZOV, D.; ŠKRABA, P. «Zigzag persistent homology in matrix multiplication time». A: *Computational Geometry (SCG'11)*. Nova York: ACM, 2011, 216–225.

- [75] MITCHELL, T. M. *Machine Learning*. Burr Ridge, IL: McGraw Hill, 45 (1997), 37.
- [76] MORONI, D.; PASCALI, M. A. «Learning topology: Bridging computational topology and machine learning». A: *Pattern Recognition. ICPR International Workshops and Challenges*. Springer International Publishing, 2021, 211–226. (Lecture Notes in Computer Science)
- [77] MUNKRES, J. R. *Elements of Algebraic Topology*. Menlo Park, CA: Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [78] NAITZAT, G.; ZHITNIKOV, A.; LIM, L.-H. «Topology of deep neural networks». *J. Mach. Learn. Res.*, 21 (2020), article núm. 184, 40 p.
- [79] OTTER, N.; PORTER, M. A.; TILLMANN, U.; GRINDROD, P.; HARRINGTON, H. A. «A roadmap for the computation of persistent homology». *EPJ Data Sci.*, 6, article núm. 17 (2017).
- [80] PEREA, J. A. «A brief history of persistence». Preprint, 2018. [Disponible en línia a: <https://arxiv.org/abs/1809.03624>]
- [81] PEREA, J. A.; DECKARD, A.; HAASE, S. B.; HARER, J. «SW1PerS: Sliding windows and 1-persistence scoring; discovering periodicity in gene expression time series data». *BMC Bioinf.*, 16, article núm. 257 (2015).
- [82] PEREA, J. A.; HARER, J. «Sliding windows and persistence: an application of topological methods to signal analysis». *Found. Comput. Math.*, 15 (3) (2015), 799–838.
- [83] PETRI, G.; EXPERT, P.; TURKHEIMER, F.; CARHART-HARRIS, R.; NUTT, D.; HELLYER, P. J.; VACCARINO, F. «Homological scaffolds of brain functional networks». *J. R. Soc. Interface*, 11 (1) (2014), 20140873.
- [84] REININGHAUS, J.; HUBER, S.; BAUER, U.; KWITT, R. «A stable multi-scale kernel for topological machine learning». A: *2015 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. IEEE, 2015, 4741–4748.
- [85] RIECK, B.; TOGNINALLI, M.; BOCK, C.; MOOR, M.; HORN, M.; GUMBSCH, T.; BORGWARDT, K. «Neural persistence: A complexity measure for deep neural networks using algebraic topology». Preprint, 2018. [Disponible en línia a: <https://arxiv.org/abs/1812.09764>]
- [86] ROBINS, V. «Towards computing homology from finite approximations». A: *Proceedings of the 14th Summer Conference on General Topology and its Applications. Topology Proc.*, 24 (1999), Summer, 503–532 (2001).
- [87] SCOLAMIERO, M.; CHACHÓLSKI, W.; LUNDMAN, A.; RAMANUJAM, R.; ÖBERG, S. «Multidimensional persistence and noise». *Found. Comput. Math.*, 17 (6) (2017), 1367–1406.
- [88] SHEEHY, D. R. «Linear-size approximations to the Vietoris-Rips filtration». *Discrete Comput. Geom.*, 49 (4) (2013), 778–796.
- [89] SINGH, G.; MÉMOLI, F.; CARLSSON, G. «Topological methods for the analysis of high dimensional data sets and 3D object recognition». A: *Eurographics*

- Symposium on Point-Based Graphics*. The Eurographics Association, 2007, 91–100.
- [90] SIZEMORE, A.; GIUSTI, C.; BASSETT, D. S. «Classification of weighted networks through mesoscale homological features». *J. Complex Netw.*, 5 (2) (2017), 245–273.
 - [91] SKRYZALIN, J.; CARLSSON, G. «Numeric invariants from multidimensional persistence». *J. Appl. Comput. Topol.*, 1 (1) (2017), 89–119.
 - [92] TAUZIN, G.; LUPO, U.; TUNSTALL, L.; BURELLA PÉREZ, J.; CAORSI, M.; MEDINA-MARDONES, A. M.; DASSATTI, A.; HESS, K. «giotto-tda: a topological data analysis toolkit for machine learning and data exploration». *J. Mach. Learn. Res.*, 22 (2021), article núm. 39, 6 p.
 - [93] THE RIVET DEVELOPERS. «Rivet». [Disponible en línia a: <https://github.com/rivetTDA/rivet/>]
 - [94] TRALIE, C.; SAUL, N.; BAR-ON, R. «Ripser.py: A lean persistent homology library for Python». *The Journal of Open Source Software*, 3 (29) (2018), 925.
 - [95] VAN VEEN, H.; SAUL, N.; EARGLE, D.; MANGHAM, S. «Kepler Mapper: A flexible Python implementation of the Mapper algorithm». *The Journal of Open Source Software*, 4 (42) (2019), 1315.
 - [96] YAO, Y.; SUN, J.; HUANG, X.; BOWMAN, G. R.; SINGH, G.; LESNICK, M.; GUIBAS, L. J.; PANDE, V. S.; CARLSSON, G. «Topological methods for exploring low-density states in biomolecular folding pathways» *J. Chem. Phys.*, 130 (14) (2009), 144115.
 - [97] YOO, J.; KIM, E. Y.; AHN, Y. M.; YE, J. C. «Topological persistence vineyard for dynamic functional brain connectivity during resting and gaming stages». *J. Neurosci. Methods*, 267 (2016), 1–13.
 - [98] ZOMORODIAN, A. «The tidy set: a minimal simplicial set for computing homology of clique complexes [extended abstract]». A: *Computational Geometry (SCG'10)*. Nova York: ACM, 2010, 257–266.
 - [99] ZOMORODIAN, A.; CARLSSON, G. «Computing persistent homology». *Discrete Comput. Geom.*, 33 (2) (2005), 249–274.

Rectificabilitat, funcions quadrades i la conjectura ε^2 de Carleson

XAVIER TOLSA

Resum: En aquest article repassem alguns resultats clàssics sobre rectificabilitat i altres resultats més recents que hi estan relacionats, com ara el teorema del viatjant de comerç de Peter Jones o la resolució de la conjectura ε^2 de Carleson. Per a aconseguir aquests darrers resultats, ha estat fonamental l'aplicació de noves idees basades en anàlisi harmònica.

Paraules clau: rectificabilitat, tangent, teorema del viatjant de comerç, funcions quadrades, mesures de Hausdorff.

Classificació MSC2010: 28A75, 28A78, 30C85.

1 Introducció

La noció de rectificabilitat té una gran importància en anàlisi matemàtica. Els conjunts rectificables apareixen de manera natural en l'anàlisi complexa, en la teoria d'integrals singulars de l'anàlisi harmònica, en el càlcul de variacions, en l'estudi de problemes de frontera lliure, etc. Per aquesta raó, l'obtenció de diferents criteris per a decidir la rectificabilitat o no d'un conjunt ha estat un camp de recerca important. D'aquesta qüestió, se n'ocupa especialment la teoria geomètrica de la mesura, que va ser desenvolupada per a subconjunts del pla a la primera meitat del segle XX per Bezikóvitx, i, posteriorment, per a dimensions superiors, per Federer, Marstrand, Mattila i d'altres.

En aquest article veurem alguns resultats d'anàlisi matemàtica referents a la noció de rectificabilitat i certes funcions «quadrades» que involucren certs

Aquest article es basa en la conferència inaugural del curs 2019–2020 de la Societat Catalana de Matemàtiques (SCM) titulada «Conjunts rectificables, fractals i funcions quadràtiques». Aquest treball està parcialment finançat per 2017-SGR-0395 (Catalunya), per MTM-2016-77635-P (MINECO, Espanya), per l'acreditació Maria de Maeztu per a Unitats d'Excel·lència (CEX2020-001084-M) i per l'European Research Council (ERC) en relació amb el programa *Horizon 2020* de la Unió Europea (Grant Agreement número 101018680).

coeficients de tipus geomètric, com les funcions de Jones o de Carleson. Comencem recordant la noció de mesura de Hausdorff s -dimensional. Donat un conjunt $E \subset \mathbb{R}^d$ i $s, \varepsilon > 0$, definim

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s(E) = \inf \left\{ \sum_i \text{diam}(A_i) : E \subset \bigcup_i A_i, \text{diam}(A_i) \leq \varepsilon \right\},$$

on $\text{diam}(A_i)$ és el diàmetre de A_i (el suprem de les distàncies entre punts de A_i) i suposem que $\{A_i\}_i$ és una família numerable de conjunts. Aleshores, la mesura de Hausdorff s -dimensional de E està definida per

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon^s(E) = \sup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon^s(E).$$

Notem que el límit anterior està ben definit (tot i que pot ser infinit), ja que $\mathcal{H}_\varepsilon^s(E)$ creix quan $\varepsilon \rightarrow 0$. En el cas $s = 1$, $\mathcal{H}^1(E)$ coincideix amb la noció habitual de longitud definida sobre corbes o altres tipus de conjunts. Anàlogament, quan s és un número natural, $\mathcal{H}^s(E)$ és el volum s -dimensional, que coincideix amb altres definicions equivalents per a conjunts més suaus, mòdul un factor constant dependent de s . Per exemple, per a $E \subset \mathbb{R}^d$, $\mathcal{H}^d$ coincideix amb la mesura de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ multiplicada per una constant que només depèn de d .

Ara ja podem introduir la noció de rectificabilitat. Diem que $E \subset \mathbb{R}^d$ és 1-rectificable si existeix una família numerable de corbes Γ_i de longitud finita tals que E està contingut en $\bigcup_i \Gamma_i$, mòdul un conjunt de longitud nul·la (remarqueu que estem identificant les nocions de longitud i de mesura de Hausdorff 1-dimensional). Això equival a dir que

$$\mathcal{H}^1\left(E \setminus \bigcup_i \Gamma_i\right) = 0.$$

Es pot demostrar que s'obté una definició equivalent si se substitueixen les corbes Γ_i de longitud finita per imatges Lipschitz de $\mathbb{R}$, és a dir, per conjunts de la forma $g_i(\mathbb{R})$, on $g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ és una funció Lipschitz, o, fins i tot, per corbes de classe C^1 .

Per a un número natural $n \geq 1$, la noció de n -rectificabilitat és anàloga. Diem que $E \subset \mathbb{R}^d$ és n -rectificable si existeix una família numerable de funcions Lipschitz $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ tals que

$$\mathcal{H}^n\left(E \setminus \bigcup_i g_i(\mathbb{R}^n)\right) = 0.$$

Com en el cas $n = 1$, en aquesta definició podem substituir la condició Lipschitz per la condició que les funcions g_i siguin de classe C^1 .

Un conjunt $E \subset \mathbb{R}^d$ s'anomena *purament no n -rectificable* si E no té cap subconjunt de mesura $\mathcal{H}^n$ positiva que sigui n -rectificable. Un exemple típic de conjunt purament no 1-rectificable de longitud positiva i finita és el

conjunt de Cantor planari $1/4$, que es construeix de la manera següent. Considerem un quadrat (tancat) Q^0 en el pla de costat 1. A continuació, el substituïm per quatre quadrats Q_i^1 , $i = 1, \dots, 4$, de costat $1/4$ continguts en Q^0 , de manera que cada Q_i^1 contingui una cantonada diferent de Q^0 . Anàlogament, en la generació següent, cada quadrat Q_i^1 se substitueix per quatre quadrats de costat $1/16$ continguts en Q_i^1 tals que cadascun contingui un vèrtex de Q_i^1 . Així, en aquesta segona generació tindrem setze quadrats Q_i^2 de costat $1/16$, amb $i = 1, \dots, 16$. Procedim inductivament, i denotem $E_m = \bigcup_{i=1}^{4^m} Q_i^m$ i $E = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m$. Com que considerem tots els quadrats anteriors tancats, es compleix que $E \neq \emptyset$. Aquest és el conjunt de Cantor planari $1/4$; vegeu la figura 1. Notem que E_m està format per 4^m quadrats de costat 4^{-m} i, per tant,

$$\mathcal{H}_{4^{-m+1}}^1(E) \leq \sum_{i=1}^{4^m} \text{diam}(Q_i^m) = 2^{1/2} \quad \text{per a tot } m \geq 1.$$

Fent $m \rightarrow \infty$, deduïm que $\mathcal{H}^1(E) \leq 2^{1/2}$. Amb una mica més d'esforç es demostra que $\mathcal{H}^1(E) > 0$. Un resultat més complicat consisteix a demostrar que també es té que $\mathcal{H}^1(E) \geq 2^{1/2}$, de manera que $\mathcal{H}^1(E) = 2^{1/2}$. El fet que aquest conjunt és purament no 1-rectificable es pot demostrar de diverses maneres. Potser la més senzilla consisteix a observar que les seves projeccions ortogonals sobre l'eix horitzontal i sobre l'eix vertical tenen longitud nul·la, i, després, aplicar un resultat (no gaire difícil) segons el qual si un conjunt té les projeccions ortogonals de longitud nul·la en dues direccions diferents, llavors és purament no 1-rectificable; vegeu [13, capítol 18] per a més detalls.

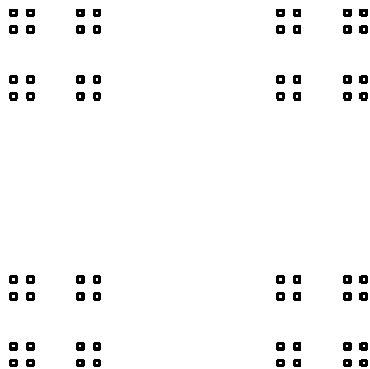


FIGURA 1: Tercera generació E_3 del conjunt de Cantor planari $1/4$.

En aquest article presentem diferents caracteritzacions de la rectificabilitat. A la secció 2 veurem un parell de criteris clàssics en termes de l'existència de tangents i de l'existència de densitats. A la secció 3 veurem altres resultats relacionats amb la funció quadrada de Jones i el problema del viatjant de comerç. Finalment, les seccions 4 i 5 estan dedicades a la solució recent de la conjectura ε^2 de Carleson, sobre la caracterització dels punts tangents d'una corba en termes de la funció quadrada $\mathcal{E}$.

2 Tangents, densitats i rectificabilitat

Remarquem que tot conjunt $E \subset \mathbb{R}^d$ $\mathcal{H}^n$ -mesurable amb $\mathcal{H}^n(E) < \infty$ es pot posar com $E = F \cup G$, on F és n -rectificable i G és purament no n -rectificable. Això es pot demostrar de la manera següent: sigui $t = \sup_A \mathcal{H}^n(E \cap A)$, on el suprem es pren sobre tots els conjunts de Borel, A , que són n -rectificables. Llavors, per a cada $j \geq 1$, sigui A_j n -rectificable i de Borel tal que $\mathcal{H}^n(E \cap A_j) \geq t - 1/j$. Es comprova fàcilment que el conjunt $F = \bigcup_j A_j$ és n -rectificable i $E \setminus F$ és purament no n -rectificable. A més a més, també és senzill comprovar que la descomposició $E = F \cup G$ és única mòdul conjunts de mesura $\mathcal{H}^n$ nul·la.

Seguidament enunciem un criteri que caracteritza els conjunts rectificables en termes de tangents aproximades. Per fer-ho, ens cal introduir prèviament terminologia i notació addicionals. Donat un punt $x \in \mathbb{R}^d$, un n -pla (o varietat lineal n -dimensional) $L \subset \mathbb{R}^d$ tal que $x \in L$, i un paràmetre $0 < s < 1$, considerem el doble con tancat amb vèrtex x i eix L donat per

$$X(x, L, s) = \{y \in \mathbb{R}^d : \text{dist}(y, L) \leq s |y - x|\};$$

vegeu la figura 2. Diem que L és *tangent* a E en x si, per a tot $0 < s < 1$, existeix un $r > 0$ tal que

$$E \cap B(x, r) \setminus X(x, L, s) = \emptyset.$$

D'altra banda, L és *tangent aproximada* a E en x si, per a tot $0 < s < 1$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \mathcal{H}^n(E \cap B(x, r) \setminus X(x, L, s)) = 0.$$

És a dir, la mesura $\mathcal{H}^n(E \cap B(x, r) \setminus X(x, L, s))$ en relació amb r^n és negligible quan $r \rightarrow 0$. El lector ha de pensar que, en canvi, «típicament» la mesura $\mathcal{H}^n(E \cap B(x, r))$ és comparable a r^n quan $n \rightarrow 0$. De fet, un resultat clàssic de teoria geomètrica de la mesura afirma que, si $0 < \mathcal{H}^n(E) < \infty$, llavors

$$2^{-n} \leq \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \mathcal{H}^n(E \cap B(x, r)) \leq 1 \quad (2.1)$$

per a $\mathcal{H}^n$ -quasi tot $x \in E$, és a dir, per a tot $x \in E$ llevat d'un conjunt de mesura $\mathcal{H}^n$ nul·la.

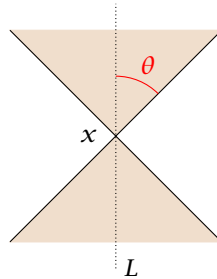


FIGURA 2: Un con en $\mathbb{R}^2$ definit per $X(x, L, s)$, amb s determinat per l'angle θ .

El teorema següent és degut a Bezikóvitx en el cas $n = 1$, $d = 2$, i a Marstrand en el cas general [11].

TEOREMA 2.1. *Sigui $n \in \mathbb{N}$ i sigui $E \subset \mathbb{R}^d$ un conjunt $\mathcal{H}^n$ -mesurable tal que $\mathcal{H}^n(E) < \infty$. Llavors:*

- (a) *E és n -rectificable si i només si existeix algun n -pla tangent aproximat en x per a $\mathcal{H}^n$ -quasi tot $x \in E$.*
- (b) *E és purament no n -rectificable si i només si, per a $\mathcal{H}^n$ -quasi tot $x \in E$, no existeix cap n -pla tangent aproximat en x .*

Observeu que l'existència o no de tangents és una propietat de tipus local, mentre que la definició de rectificabilitat és de tipus global. Noteu també que, amb una ullada ràpida a la figura 1, es pot intuir que el conjunt de Cantor planari $1/4$ no té tangent aproximada en cap punt i, per tant, el teorema anterior ens confirma que és purament no rectificable.

Sorprenentment, la rectificabilitat també es pot caracteritzar en termes de densitats. Donats $E \subset \mathbb{R}^d$ i $x \in \mathbb{R}^d$, les densitats n -dimensionals superior i inferior de E en x són, respectivament,

$$\begin{aligned}\Theta^{*n}(x, E) &:= \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^n(E \cap B(x, r))}{(2r)^n}, \\ \Theta_*^n(x, E) &:= \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^n(E \cap B(x, r))}{(2r)^n}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Si aquestes densitats coincideixen, llavors $\Theta^n(x, E) := \Theta^{*n}(x, E) = \Theta_*^n(x, E)$ s'anomena *densitat n -dimensional* de E en x . Noteu que la densitat $\Theta^{*n}(x, E)$ ha aparegut a (2.1).

TEOREMA 2.2. *Sigui $n \in \mathbb{N}$ i sigui $E \subset \mathbb{R}^d$ un conjunt $\mathcal{H}^n$ -mesurable tal que $\mathcal{H}^n(E) < \infty$. Llavors,*

- (a) *E és n -rectificable si i només si $\Theta^n(x, E)$ existeix i és igual a 1 per a $\mathcal{H}^n$ -quasi tot $x \in E$.*
- (b) *E és purament no n -rectificable si i només si $\Theta_*^n(x, E) < 1$ per a $\mathcal{H}^n$ -quasi tot $x \in E$.*

Aquest teorema és degut a Bezikóvitx per a $n = 1$, $d = 2$; a Marstrand [10] per a $n = 2$, $d = 3$, i a Mattila [12], per a n, d arbitraris. A més a més, en el cas $n = 1$, $d = 2$, Bezikóvitx va demostrar que si E és purament no 1-rectificable, llavors $\Theta_*^1(x, E) \leq 3/4$ per a $\mathcal{H}^1$ -quasi tot $x \in E$. Es conjectura que aquesta fita també és certa substituint $3/4$ per $1/2$. Aquest és l'anomenat *problema $1/2$* de Bezikóvitx, que encara està obert.

Una mesura de Borel μ de $\mathbb{R}^d$ s'anomena *n -rectificable* si és de la forma $\mu = \rho \mathcal{H}^n|_E$, on $E \subset \mathbb{R}^d$ és n -rectificable i ρ és una funció positiva de $L^1(\mathcal{H}^n|_E)$. L'any 1987 David Preiss ([17]) va demostrar el resultat següent, considerat una de les màximes fites de la teoria geomètrica de la mesura.

TEOREMA 2.3. *Sigui μ una mesura de Borel en $\mathbb{R}^d$. Es compleix que μ és n -rectificable si i només si la densitat*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{(2r)^n} \quad (2.3)$$

existeix i és no nul·la per a μ -quasi tot $x \in \mathbb{R}^d$.

Remarquem que la implicació difícil del teorema és la que afirma que l'existència del límit (2.3) i el fet que sigui no nul impliquen la n -rectificabilitat de E . Notem també que, per a $E \subset \mathbb{R}^d$ amb $\mathcal{H}^n(E) < \infty$, prenent $\mu = \rho \mathcal{H}^n|_E$ deduïm que E és n -rectificable si i només si $\Theta^n(x, E)$ existeix i és no nul per a $\mathcal{H}^n$ -quasi tot $x \in E$. Clarament, hi ha una gran semblança entre aquesta afirmació i (a) en el teorema 2.2. La diferència essencial és que per a demostrar la n -rectificabilitat de E , en (a) del teorema 2.2 se suposa que la densitat $\Theta(x, E) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^n(E \cap B(x, r))}{(2r)^n}$ és exactament 1, mentre que en el teorema anterior simplement s'afirma que el límit existeix i és no nul. Aquest fet fa que la demostració del teorema de Preiss sigui molt més complicada.

Un concepte fonamental per a demostrar el teorema de Preiss és el de mesura tangent. Diem que ν és una mesura tangent a μ en x si existeix una successió de radis $r_k \rightarrow 0$ tals que les mesures ν_k definides per

$$\nu_k(A) = \frac{1}{\mu(B(x, r_k))} \mu(x + r_k A) \quad \text{per a tot } A \subset \mathbb{R}^d$$

convergeixen feblement a ν . De vegades, també es diu que ν és un esclatament (*blow up* en anglès) de μ en x . Les mesures tangents a μ en un punt x ens aporten informació del comportament local de la mesura μ a prop de x . En certa manera, les mesures tangents són l'anàleg a la noció de derivada per a una funció.

Es demostra que el fet que per a μ -quasi tot $x \in \mathbb{R}^d$ la densitat (2.3) existeixi i sigui no nul·la implica que, per a μ -quasi tot x , tota mesura tangent ν a μ en x és n -uniforme, és a dir, existeix una constant $c > 0$ tal que

$$\nu(B(x, r)) = c r^n \quad \text{per a tot } x \in \text{supp}(\nu) \text{ i tot } r > 0.$$

Aquest resultat permet reduir la demostració del teorema 2.3 a l'estudi de les mesures n -uniformes. En efecte, observem que, si $L \subset \mathbb{R}^d$ és un n -pla, llavors la mesura $\nu = \mathcal{H}^n|_L$ és n -uniforme. Recíprocament, si es complís que tota mesura n -uniforme és de la forma $c \mathcal{H}^n|_L$, llavors essencialment es podria demostrar el teorema 2.3 aplicant la caracterització dels conjunts rectificables en termes de l'existència de tangents del teorema 2.1. Això s'explicaria perquè, a escales cada cop més petites, la mesura μ tendiria a ser una mesura de la forma $c \mathcal{H}^n|_L$, en què L seria un n -pla.

Per a $n = 1$ o 2 , certament es compleix que tota mesura n -uniforme és del tipus $c \mathcal{H}^n|_L$, on L és un n -pla. Tanmateix, per a $n \geq 3$ això no és correcte.

De fet, Kowalski i Preiss ([8]) van demostrar que la mesura $\mathcal{H}^3$ sobre el con 3-dimensional de $\mathbb{R}^4$ definit per l'equació

$$x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

és 3-uniforme. En lloc de caracteritzar les mesures n -uniformes, en el treball [17] Preiss demostra determinades propietats d'aquestes mesures que li permeten provar el teorema 2.3 mitjançant un argument de connectivitat. Remarquem que la caracterització de les mesures n -uniformes és un problema obert força difícil. De fet, fins fa poc ni tan sols se sabia si hi havia mesures n -uniformes essencialment diferents de la descrita anteriorment. Un progrés important recent és degut a Nimer [15], que mostra que n'hi ha moltes més i dona una caracterització completa de les mesures 3-uniformes còniques de $\mathbb{R}^5$.

3 El teorema del viatjant de comerç de Peter Jones i els coeficients β

Els resultats descrits a la secció anterior en els teoremes 2.1, 2.2 i 2.3 són de naturalesa qualitativa. Tanmateix, per a l'aplicació a certs problemes d'anàlisi harmònica relacionats amb les integrals singulars i les singularitats evitables per a les funcions holomorfes acotades, són necessaris resultats de tipus més quantitatiu. Aquesta va ser la motivació que va portar Peter Jones a demostrar el 1989 el que es coneix com a *teorema del viatjant de comerç de l'analista*, un resultat que ha estat molt influent en l'anàlisi geomètrica de les darreres dècades. Per a enunciar aquest resultat, necessitem definir primer els coeficients β_∞ : donat un cub $Q \subset \mathbb{R}^d$, denotem

$$\beta_{\infty,E}(Q) = \inf_L \left\{ \sup_{y \in E \cap Q} \frac{\text{dist}(y, L)}{\ell(Q)} \right\},$$

on l'ínfim es pren sobre totes les rectes $L \subset \mathbb{R}^d$ i $\ell(Q)$ és la longitud del costat de Q . És a dir, $2\ell(Q)\beta_{\infty,E}(Q)$ és l'amplada de la banda més estreta que conté $E \cap Q$. El coeficient $\beta_{\infty,E}(Q)$ és invariant per escales i mesura com és de proper a una recta el conjunt $E \cap Q$, de manera que, en particular, $\beta_{\infty,E}(Q) = 0$ si $E \cap Q$ està contingut en alguna recta L ; vegeu la figura 3.

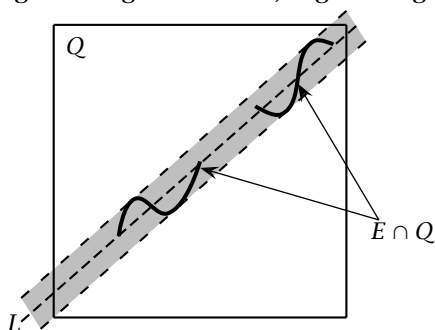


FIGURA 3: La banda d'amplada mínima que conté $E \cap Q$ (ombrejada a la figura) coincideix amb $2\beta_{\infty,E}(Q)\ell(Q)$. El conjunt $E \cap Q$ està format en aquest cas per les dues corbes en negreta.

TEOREMA 3.1 ([7]). *Un conjunt $E \subset \mathbb{R}^d$ està contingut en una corba de longitud finita si i només si*

$$\sum_{Q \in \mathcal{D}} \beta_{\infty, E}(3Q)^2 \ell(Q) < \infty, \quad (3.1)$$

on $\mathcal{D}$ és la família de tots els cubs diàdics de $\mathbb{R}^d$ i $3Q$ denota el cub concèntric amb Q de costat $3\ell(Q)$. En aquest cas, la longitud de la corba més curta Γ que conté E satisfà

$$c^{-1} \mathcal{H}^1(\Gamma) \leq \text{diam}(E) + \sum_{Q \in \mathcal{D}} \beta_{\infty, E}(3Q)^2 \ell(Q) \leq c \mathcal{H}^1(\Gamma), \quad (3.2)$$

on $c > 0$ és una constant absoluta dependent només de d .

Notem que el resultat proporciona una estimació òptima, llevat de constants, de la longitud de la corba més curta que connecta tots els punts del conjunt E . Aquesta és la raó per la qual rep el nom de *teorema del viatjant de comerç*. Remarquem que aquest teorema va ser provat per a subconjunts de $\mathbb{R}^2$ per Jones a [7], mentre que l'extensió a subconjunts de $\mathbb{R}^d$ amb $d \geq 3$ d'una de les implicacions del teorema (concretament, del fet que si E està contingut en una corba Γ , llavors la segona desigualtat de (3.2) és vàlida) és deguda a Okikiolu [16].

Per a entendre l'equació (3.2), considerem el cas en què el conjunt E coincideix amb la corba Γ . Considerem també aproximacions Γ_k de Γ formades per segments de longitud comparable a 2^{-k} , com a la figura 4.

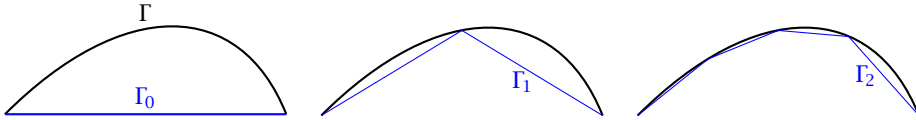


FIGURA 4: La corba Γ i les successives aproximacions $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$.

Essencialment, els coeficients $\beta_{\infty, \Gamma}$ mesuren l'increment de longitud entre aproximacions successives Γ_k de Γ , de manera que¹

$$\mathcal{H}^1(\Gamma_{k+1}) - \mathcal{H}^1(\Gamma_k) \approx \sum_{Q \in \mathcal{D}: \ell(Q) = 2^{-k}} \beta_{\infty, \Gamma}(3Q)^2 \ell(Q). \quad (3.3)$$

Això es deu al fet que, pel teorema de Pitàgores, quan substituïm un segment de longitud ℓ per dos altres segments que formen un triangle d'altura $h \leq \ell$ com en la figura 5, l'increment de longitud és:

$$\sqrt{(2h)^2 + \ell^2} - \ell \approx \left(\frac{h}{\ell}\right)^2 \ell = \beta^2 \ell,$$

on $\beta \ell$ és l'amplada de la banda més estreta que conté el triangle.

¹ La notació $a \approx b$ significa que a i b són comparables, és a dir, que existeix una constant absoluta $C > 0$ tal que $C^{-1}b \leq a \leq Cb$.

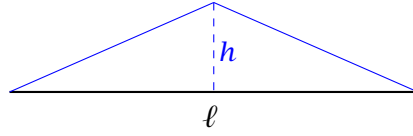


FIGURA 5: L'increment de longitud entre el segment de la base i la corba formada pels altres dos costats del triangle és comparable a $\beta^2 \ell$, on $\beta \ell = h$ és l'amplada de la banda més estreta que conté el triangle.

Aleshores, sumant (3.3) des de $k = 0$ fins a ∞ , tenim que

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) - \mathcal{H}^1(\Gamma_0) \approx \sum_{Q \in \mathcal{D}} \beta_{\infty, \Gamma}(3Q)^2 \ell(Q),$$

amb $\mathcal{H}^1(\Gamma_0) = \text{diam}(\Gamma_0)$, de manera que obtenim (3.2). Tot i que aquest argument no és prou rigorós i cal modificar-lo adequadament (sobretot en el cas de conjunts E arbitraris), sí que ens proporciona la idea principal que hi ha darrere de la demostració del teorema 3.1.

A continuació enunciem un resultat de Bishop i Jones de l'any 1994 que caracteritza les tangents a una corba de Jordan en termes dels coeficients $\beta_{\infty, \Gamma}$. Per fer-ho, és convenient canviar els cubs Q en la definició dels coeficients β_{∞} per boles $B(x, r)$. Més concretament, donats un conjunt $E \subset \mathbb{R}^d$ i una bola B , denotem

$$\beta_{\infty, E}(B) = \inf_L \left\{ \sup_{y \in E \cap B} \frac{\text{dist}(y, L)}{r(B)} \right\},$$

on l'ínfim es pren sobre totes les rectes $L \subset \mathbb{R}^d$ i $r(B)$ denota el radi de B . També escriurem $\beta_{\infty, E}(x, r)$ en lloc de $\beta_{\infty, E}(B(x, r))$. Tenim:

TEOREMA 3.2 ([4]). *Sigui $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una corba de Jordan. Aleshores, llevat d'un conjunt de mesura $\mathcal{H}^1$ nul·la,*

$$\int_0^1 \beta_{\infty, \Gamma}(x, r)^2 \frac{dr}{r} < \infty \text{ per a } x \in \Gamma \iff \Gamma \text{ té una tangent en } x. \quad (3.4)$$

Remarquem que la funció

$$J(x) = \int_0^1 \beta_{\infty, \Gamma}(x, r)^2 \frac{dr}{r}$$

rep el nom de *funció quadrada de Jones*. Prèviament als treballs de Jones relacionats amb el teorema del viatjant de comerç, en l'estudi de la suavitat de les funcions dins l'anàlisi de Fourier, havien aparegut altres funcions més o menys anàlogues. El teorema del viatjant de comerç de Peter Jones està parcialment inspirat en tècniques i resultats d'aquest camp.

Els resultats anteriors s'han estès a conjunts n -rectificables, amb $n > 1$, de diverses maneres. En particular, David i Semmes, a la dècada del 1990, van definir i estudiar la noció de n -rectificabilitat uniforme [5], que es pot

caracteritzar en termes de certs coeficients $\beta_{p,E}$ que definim tot seguit. Donat un conjunt $\mathcal{H}^n$ -mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$, $1 \leq p < \infty$, $x \in \mathbb{R}^d$, i $r > 0$, denotem

$$\beta_{p,E}(x, r) = \inf_L \left(\frac{1}{r^n} \int_{E \cap B(x, r)} \left(\frac{\text{dist}(y, L)}{r} \right)^p d\mathcal{H}^n(y) \right)^{1/p},$$

on l'ínfim es pren sobre tots els n -plans $L \subset \mathbb{R}^d$.

En lloc d'enunciar cap resultat relacionat amb rectificabilitat uniforme, que potser ens portaria massa lluny, enunciem un resultat més recent en termes dels coeficients $\beta_{2,E}$, degut a Azzam i Tolsa.

TEOREMA 3.3. *Sigui $E \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{H}^n$ -mesurable i tal que $\mathcal{H}^n(E) < \infty$. Llavors, E és n -rectificable si i solament si*

$$\int_0^1 \beta_{2,E}(x, r)^2 \frac{dr}{r} < \infty \quad \text{per a } \mathcal{H}^n\text{-quasi tot } x \in E. \quad (3.5)$$

El fet que els conjunts n -rectificables satisfan (3.5) va ser demostrat a [18] i la implicació contrària, a [1]. Remarquem que, més recentment, la relació entre els coeficients $\beta_{2,E}$ i la rectificabilitat ha estat essencial per a resoldre diversos problemes de frontera lliure per part de Naber i Valtorta [14].

4 La conjectura ε^2 de Carleson

En aquesta secció parlarem de la resolució de la conjectura ε^2 de Carleson. Lennart Carleson és un matemàtic suec que ha fet contribucions fonamentals a l'anàlisi harmònica i a la teoria dels sistemes dinàmics. És especialment conegut per haver demostrat que la sèrie de Fourier de qualsevol funció de $L^2([0, 2\pi])$ convergeix puntualment quasi per a tot punt. Entre moltes altres distincions, va rebre el premi Abel l'any 2006.

Per a poder enunciar la conjectura ε^2 de Carleson, ens cal introduir prèviament els coeficients $\varepsilon(x, r)$. Sigui $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una corba de Jordan, i siguin Ω^+ , Ω^- les components acotada i no acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, respectivament. Donats $x \in \Gamma$, $r > 0$, siguin $I^+(x, r)$ i $I^-(x, r)$ arcs de longitud màxima continguts en $\Omega^+ \cap \partial B(x, r)$ i $\Omega^- \cap \partial B(x, r)$, respectivament; vegeu la figura 6.

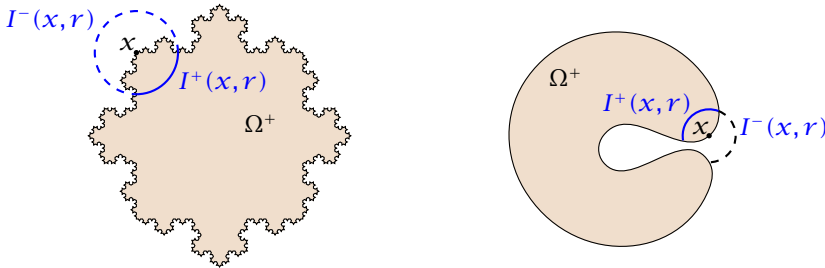


FIGURA 6: Dos dominis de Jordan Ω^+ , amb els arcs $I^+(x, r)$, $I^-(x, r)$, corresponents a certs x, r .

Siguin $\theta^\pm(x, r)$ els angles dels arcs $I^\pm(x, r)$. Llavors, denotem

$$\varepsilon(x, r) = \max(|\pi - \theta^+(x, r)|, |\pi - \theta^-(x, r)|).$$

La funció quadrada $\mathcal{E}$ de Carleson està definida per

$$\mathcal{E}(x) = \int_0^1 \varepsilon(x, r)^2 \frac{dr}{r}.$$

Recordem que, per definició, una recta $L \subset \mathbb{R}^2$ és una tangent a Γ en x si, per a tot $0 < s < 1$, existeix un $r > 0$ tal que

$$\Gamma \cap B(x, r) \setminus X(x, L, s) = \emptyset.$$

Diem que L és una tangent per al domini de Jordan Ω^+ (en què $\Gamma = \partial\Omega^+$) si, a més, es compleix que una component de $B(x, r) \setminus X(x, L, s)$ està continguda en Ω^+ i l'altra en Ω^- (per a tot $s \in (0, 1)$ i r prou petit dependent de s).

La conjectura ε^2 de Carleson afirma que, llevat d'un subconjunt de longitud nul·la de Γ , $\mathcal{E}(x) < \infty$ si i solament si Ω^+ té una tangent en x . Aquesta conjectura ha estat demostrada recentment:

TEOREMA 4.1. *Sigui Γ una corba de Jordan i Ω^+ , Ω^- les components acotada i no acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, respectivament. Aleshores, llevat d'un conjunt de mesura $\mathcal{H}^1$ nul·la,*

$$\int_0^1 \varepsilon(x, r)^2 \frac{dr}{r} < \infty \text{ per a } x \in \Gamma \iff \Omega^+ \text{ té una tangent en } x. \quad (4.1)$$

El fet que $\mathcal{E}(x) < \infty$ per a $\mathcal{H}^1$ -quasi tot punt x on existeix una tangent per Ω^+ va ser demostrat per Chris Bishop a la seva tesi doctoral l'any 1987 (dirigida per Peter Jones), i fou publicat posteriorment en un article conjunt de Bishop, Carleson, Garnett i Jones [3]. La implicació contrària, que podem considerar com la més difícil, va ser demostrada recentment en un treball conjunt de Jaye, Tolsa i Villa [6]. Notem que en el cas en què $\mathcal{H}^1(\Gamma) < \infty$, la corba Γ és 1-rectificable i, per tant, té una tangent aproximada per a $\mathcal{H}^1$ -quasi tot $x \in \Gamma$. Per tant, el cas més interessant és aquell en què $\mathcal{H}^1(\Gamma) = \infty$, on Γ pot ser purament no 1-rectificable (és el cas de la corba tipus floc de neu a l'esquerra de la figura 6).

La primera vegada que s'esmenta la conjectura ε^2 és a la tesi doctoral de Bishop, el qual es va plantejar aquesta qüestió per les seves connexions amb la mesura harmònica. De fet, la seva demostració de « $\mathcal{E}(x) < \infty \Rightarrow$ existeix una tangent a Ω^+ en x , per a $\mathcal{H}^1$ -quasi tot $x \in \Gamma$ » es basa en una coneguda estimació per la mesura harmònica deguda a Beurling i en el fet que la mesura harmònica és mútuament absolutament contínua amb la mesura de longitud en els punts tangents d'una corba de Jordan. Posteriorment, Bishop proposa la conjectura ε^2 a l'article [2], que atribueix a Carleson. Tanmateix, sembla que Carleson no va formular aquesta conjectura en cap article seu i probablement

no la va escriure explícitament enlloc, tot i que és evident que coneixia aquest problema, tenint en compte que és coautor de [3].

Observem la semblança entre les afirmacions (3.4) i (4.1). És natural preguntar-se si un teorema es pot deduir de l'altre. De fet, és fàcil comprovar que per a tot punt tangent $x \in \Gamma$, si r és un radi prou petit, llavors

$$\varepsilon(x, r) \leq c \beta_{\infty, \Gamma}(x, r),$$

per a alguna constant fixada c . Això es pot deduir amb arguments geomètrics senzills. Fixeu-vos en la figura 7: si denotem per y i z els extrems de l'arc $I^+(x, r)$, com en la figura, és clar que el triangle amb vèrtexs x , y , z ha d'estar contingut en la banda d'amplada mínima que conté $\Gamma \cap B(x, r)$ (aquí suposem que $B(x, r)$ és tancada). Per tant, $\beta_{\infty, \{x, y, z\}}(x, r) \leq \beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$, o equivalentment, l'altura del triangle des del vèrtex x fins al costat yz ha de ser més petita que l'amplada de l'esmentada banda. És a dir, $r \cos \frac{\theta^+(x, r)}{2} \leq 2r \beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$. Per tant,

$$|\pi - \theta^+(x, r)| \approx \left| \sin \frac{\pi - \theta^+(x, r)}{2} \right| = \left| \cos \frac{\theta^+(x, r)}{2} \right| \leq 2 \beta_{\infty, \Gamma}(x, r).$$

Evidentment, la mateixa estimació és certa canviant $\theta^+(x, r)$ per $\theta^-(x, r)$, i llavors deduïm que efectivament $\varepsilon(x, r) \leq c \beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$. A partir d'aquest fet i del teorema 3.2 obtenim una nova demostració de la implicació « $\Leftarrow$ » en (4.1), diferent de l'original de Bishop.

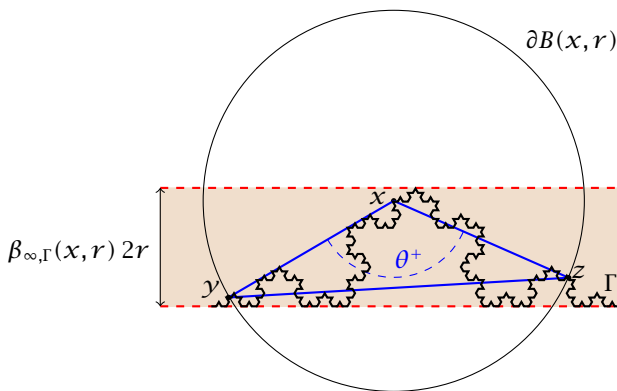
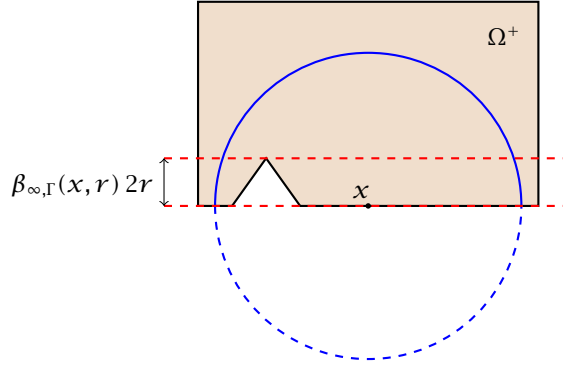


FIGURA 7: Comparació entre $\beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$ i $\varepsilon(x, r)$.

D'altra banda, la desigualtat contrària, $\varepsilon(x, r) \geq c \beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$, és falsa. En efecte, observeu que a la figura 8 tenim un exemple en què $\varepsilon(x, r) = 0$, mentre que $\beta_{\infty, \Gamma}(x, r) > 0$.

FIGURA 8: Un cas en què $\varepsilon(x, r) = 0$ i $\beta_{\infty, \Gamma}(x, r) > 0$.

5 Idees principals per a la demostració de la implicació « $\Rightarrow$ » en (4.1)

En aquesta darrera secció descriurem les idees principals de [6] per a demostrar que, mòdul un conjunt de longitud nul·la,

$$\int_0^1 \varepsilon(x, r)^2 \frac{dr}{r} < \infty \text{ per a } x \in \Gamma \quad \Rightarrow \quad \Omega^+ \text{ té una tangent en } x. \quad (5.1)$$

Una de les dificultats importants per provar (5.1) es deu al fet que els coeficients $\varepsilon(x, r)$ són força inestables. És a dir, el valor de $\varepsilon(x, r)$ pot canviar dràsticament si x o r canvien lleugerament. A més a més, pot ocórrer que $\varepsilon(x, r)$ sigui nul, mentre que $\varepsilon(x, r/2)$ no. En canvi, els coeficients $\beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$ són molt més estables, i és fàcil comprovar que $\beta_{\Gamma, \infty}(x, r/2) \lesssim \beta_{\Gamma, \infty}(x, r)$. Aquesta és una de les raons per introduir uns nous coeficients $\alpha_\varphi(x, r)$.

Donada una funció radial $\varphi \in C^\infty$, positiva, i de la classe de Schwartz,² i donat $r > 0$, denotem $\varphi_r(x) = \frac{1}{r^2} \varphi(\frac{x}{r})$. Donat $x \in \Gamma$, considerem el coeficient

$$\alpha_\varphi(x, r) = \left| \int_{\Omega^+} \varphi_r(x - y) dy - \int_{\mathbb{R}_+^2} \varphi_r(y) dy \right|.$$

Observeu que el cas en què Ω^+ sigui un semiplà amb vora Γ passant per x , llavors $\alpha_\varphi(x, r) = 0$ per a tot $r > 0$ (el mateix passa amb el coeficient $\varepsilon(x, r)$ i amb $\beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$). De fet, integrant en coordenades polars es pot comprovar que

$$\int_0^\infty \alpha_\varphi(x, r)^2 \frac{dr}{r} \lesssim \int_0^\infty \varepsilon(x, r)^2 \frac{dr}{r}.$$

² En cas que el lector desconeixi què és la classe de Schwartz, pot pensar que φ simplement és una funció C^∞ amb suport compacte, o bé la funció $\varphi(x) = e^{-|x|^2}$.

A partir d'aquí es dedueix que, si la integral en (5.1) és finita, llavors també

$$\int_0^1 \alpha_\varphi(x, r)^2 \frac{dr}{r} < \infty.$$

La demostració de la implicació (5.1) té dues parts principals. La primera consisteix a obtenir el resultat següent:

LEMA 5.1. *Sigui $\Omega^+ \subset \mathbb{R}^2$ un domini de Jordan i $\Gamma = \partial\Omega^+$. Sigui $\varphi(x) = e^{-|x|^2}$. Sigui μ una mesura amb suport a Γ tal que $\mu(B(x, t)) \leq t$ per a tot $x \in \mathbb{R}^2$ i $t > 0$. Sigui B una bola centrada en Γ tal que*

$$\mu(B) \gtrsim r(B). \quad (5.2)$$

Per a tot $\varepsilon > 0$, existeix $\delta > 0$, tal que si

$$\int_{10B} \int_0^{10r(B)} [\varepsilon(x, t)^2 + \alpha_\varphi(x, t)^2] d\mu(x) \frac{dt}{t} \leq \delta \mu(10B), \quad (5.3)$$

llavors

$$\beta_{\infty, \Gamma}(B) \leq \varepsilon.$$

La demostració d'aquest lema és la part més nova i difícil de [6]. Es duu a terme per arguments de compacitat. La idea és la següent. Suposem que el lema no és cert. Llavors existeixen una successió de dominis de Jordan Ω_k^+ , mesures μ_k i boles B_k que satisfan (5.2) i (5.3), amb $\delta = 1/k$, tals que $\beta_{\infty, \Gamma_k}(B_k) \geq \varepsilon$. Reescalant, podem suposar que $B_k = B(0, 1)$, i llavors passant al límit (en la distància de Hausdorff) i prenent una successió parcial si cal, «idealment» arribem a un domini Ω^+ i una mesura μ tals que $F_r(x)$ s'anulla a $\text{supp } \mu \cap 10B \subset \Gamma = \partial\Omega^+$, on

$$F_r(x) := \int_{\Omega^+} \frac{1}{r^2} \exp(|x - y|^2/r^2) dy - \frac{\pi}{2}.$$

Observem que F_r és una funció real analítica i, per tant, $\text{supp } \mu \cap 10B$ està contingut en una varietat real analítica. L'objectiu llavors és demostrar que $\Gamma \cap B$ és una recta. Això contradiria el fet que $\beta_{\infty, \Gamma_k}(B) \geq \varepsilon$ per a tot k (la qual cosa implica que $\beta_{\infty, \Gamma}(B) \geq \varepsilon$ passant al límit).

L'argument descrit en el paràgraf anterior té una dificultat important (que es resol adequadament a [6]): els dominis i les corbes de Jordan no són estables per pas al límit en la distància de Hausdorff. De fet, si tenim que $\Omega_k^+ \rightarrow G^+$, $\overline{\Omega_k^-} \rightarrow G^-$, $\Gamma_k \rightarrow G_0$, localment en la distància de Hausdorff, pot ocórrer que G_0 ni tan sols coincideixi amb la frontera de G^+ o G^- .

El segon lema principal per a la demostració de (5.1) és el següent:

LEMA 5.2. *Siguin $\theta > 0$ i $\varepsilon > 0$. Sigui $\Omega^+ \subset \mathbb{R}^2$ un domini de Jordan i $\Gamma = \partial\Omega^+$. Sigui B_0 una bola centrada en Γ i sigui μ una mesura amb suport a $\Gamma \cap B_0$ tal que $\mu(B(x, t)) \leq t$ i que satisfà*

- $\mu(B_0) \gtrsim r(B_0)$.
- $\beta_{\infty, \Gamma}(B) \leq \delta$ per a tota bola B centrada en Γ tal que $\mu(B) \geq \theta r(B)$.
- Per a una funció radial $\varphi \in C^\infty$, positiva, amb suport compacte, es compleix que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{100r(B_0)} \alpha_\varphi(x, t)^2 \frac{dt}{t} d\mu(x) \leq \delta \mu(\mathbb{R}^2).$$

Si $\theta > 0$ és prou petit i $\delta = \delta(\theta)$ també és prou petit, llavors existeix un graf Lipschitz Λ tal que

$$\mu(\Lambda) \geq \frac{1}{2} \mu(B_0).$$

Aquest lema es demostra mitjançant tècniques de rectificabilitat quantitativa i arguments de temps de parada inspirats per tècniques desenvolupades per David i Semmes [5] i Léger [9]. Un ingredient essencial prové d'una estimació de Fourier que afirma que, si $\Gamma_A \subset \mathbb{R}^2$ és el graf d'una funció Lipschitz $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ amb pendent prou petit i suport compacte i denotem $\Omega_A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > A(x_1)\}$, llavors

$$\int_{\Gamma_A} \int_0^\infty \alpha_{\varphi, \Omega_A}(x, r)^2 \frac{dr}{r} d\mathcal{H}^1(x) \approx \|A'\|_2^2.$$

Notem que aquesta estimació ens diu, en particular, que si la integral de l'esquerra és molt petita, llavors Ω_A és molt proper al semiplà superior de $\mathbb{R}^2$, ja que $\|A'\|_2 \ll 1$.

Per deduir la implicació (5.1) a partir dels lemes 5.1 i 5.2, raonem de la manera següent. Suposem que existeix un conjunt $E \subset \Gamma$ amb $\mathcal{H}^1(E) > 0$ tal que, per a tot $x \in E$, $\mathcal{E}(x) < \infty$ però la tangent en x no existeix. Sigui $F \subset E$ amb $0 < \mathcal{H}^1(F) < \infty$ i sigui $\mu = \frac{1}{6} \mathcal{H}^1|_F$. Reduint F i reescalant si cal, podem suposar que $\mu(B(x, r)) \leq r$ per a tot $x \in \mathbb{R}^2$ i $r > 0$, i que, per a tot $x \in F$,

$$\int_0^1 [\varepsilon(x, r)^2 + \alpha_\varphi(x, r)^2] \frac{dr}{r} \leq \delta.$$

Per propietats estàndard de les mesures de Hausdorff, trobem una bola B_0 tal que $\mu(B_0) \approx r(B_0) \leq 1$. Aplicant els dos lemes anteriors, trobem un subconjunt 1-rectificable $F_0 \subset F$ tal que $\mathcal{H}^1(F_0) > 0$. Per tant, aquest conjunt té tangent aproximada a gairebé tot punt (respecte a $\mathcal{H}^1$), pel teorema 2.1. A més, aplicant novament el lema 5.1 és fàcil comprovar que aquestes tangents aproximades són tangents al domini Ω^+ . Això contradiu la suposició inicial sobre l'existència del conjunt $E \subset \Gamma$ amb $\mathcal{H}^1(E) > 0$ tal que, per a tot $x \in E$, $\mathcal{E}(x) < \infty$ però la tangent en x no existeix.

Referències

- [1] AZZAM, J.; TOLSA, X. «Characterization of n -rectifiability in terms of Jones' square function: Part II». *Geom. Funct. Anal.*, 25 (5) (2015), 1371–1412.
- [2] BISHOP, C. J. «Some questions concerning harmonic measure». A: *Partial Differential Equations with Minimal Smoothness and Applications* (Chicago, IL, 1990). Nova York: Springer, 1992, 89–97. (IMA Vol. Math. Appl.; 42)
- [3] BISHOP, C. J.; CARLESON, L.; GARNETT, J. B.; JONES, P. W. «Harmonic measures supported on curves». *Pacific J. Math.*, 138 (2) (1989), 233–236.
- [4] BISHOP, C. J.; JONES, P. W. «Harmonic measure, L^2 estimates and the Schwarzian derivative». *J. Anal. Math.*, 62 (1994), 77–113.
- [5] DAVID, G.; SEMMES, S. «Singular integrals and rectifiable sets in $\mathbb{R}^n$: Beyond Lipschitz graphs». *Astérisque*, 193 (1991), 152 p.
- [6] JAYE, B.; TOLSA, X.; VILLA, M. «A proof of Carleson's ε^2 -conjecture». *Ann. of Math. (2)*, 194 (1) (2021), 97–161.
- [7] JONES, P. W. «Rectifiable sets and the traveling salesman problem». *Invent. Math.*, 102 (1) (1990), 1–15.
- [8] KOWALSKI, O.; PREISS, D. «Besicovitch-type properties of measures and submanifolds». *J. Reine Angew. Math.*, 379 (1987), 115–151.
- [9] LÉGER, J. C. «Menger curvature and rectifiability». *Ann. of Math. (2)*, 149 (3) (1999), 831–869.
- [10] MARSTRAND, J. M. «Hausdorff two-dimensional measure in 3-space». *Proc. London Math. Soc. (3)*, 11 (1961), 91–108.
- [11] MARSTRAND, J. M. «The (φ, s) regular subsets of n -space». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 113 (1964), 369–392.
- [12] MATTILA, P. «Hausdorff m regular and rectifiable sets in n -space». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 205 (1975), 263–274.
- [13] MATTILA, P. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces. Fractals and rectifiability*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics; 44)
- [14] NABER, A.; VALTORTA, D. «Rectifiable-Reifenberg and the regularity of stationary and minimizing harmonic maps». *Ann. of Math. (2)*, 185 (1) (2017), 131–227.
- [15] NIMER, A. D. «Conical 3-uniform measures: a family of new examples and characterizations». Preprint (2016). [Disponible en línia a: arXiv:1608.02604] [Apareixerà a *J. Diff. Geom.*]
- [16] OKIKIOLU, K. «Characterization of subsets of rectifiable curves in $\mathbb{R}^n$ ». *J. London Math. Soc. (2)*, 46 (2) (1992), 336–348.
- [17] PREISS, D. «Geometry of measures in $\mathbb{R}^n$: distribution, rectifiability, and densities». *Ann. of Math. (2)*, 125 (3) (1987), 537–643.

- [18] TOLSA, X. «Characterization of n -rectifiability in terms of Jones' square function: part I». *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 54 (4) (2015), 3643-3665.

ICREA, PASSEIG LLUÍS COMPANYS 23, 08010 BARCELONA
DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES, UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA,
08193 BELLATERRA
I CENTRE DE RECERCA MATEMÀTICA, 08193 BELLATERRA
xtolsa@mat.uab.cat

English summaries

Anna Cima

Globally attracting equilibrium points

An equilibrium point of a continuous or discrete dynamical system is a global attractor if the orbit of any point tends to the equilibrium when time tends to infinity. In this article we deal with the problem of giving sufficient conditions for an equilibrium point of a dynamical system to be a global attractor. In particular, we deal with continuous and discrete Markus-Yamabe problems and Lasalle conditions. We obtain some affirmative answers to the existence of a global attractor and we find some examples that do not exhibit it. Lastly, we detail a case in which the problem is not solved. The presented results have been obtained in collaboration with Armengol Gasull and Francesc Mañosas, and have been taken from the common articles cited in the bibliography.

Keywords: continuous and discrete dynamical systems, global attractor, Markus-Yamabe conjecture, Jacobian conjecture, linearization theorem.

MSC2010 Subject Classification: 35A24, 37Cxx.

Esther Ibáñez-Marcelo

Introduction to Topological Data Analysis and applications

Topological Data Analysis (TDA) has been increasingly trending in the last ten years. Here we present an introduction based on basic concepts and definitions that allow us to describe the main tools in this recent field where greater importance is given to shape rather than to the metrics. We will see

what persistent homology consists of and how it can be applied in a wide range of scientific fields, such as neuroscience, image recognition and genetics.

Keywords: persistent homology, persistence diagram, barcode, *Mapper*, data analysis.

MSC2010 Subject Classification: 55N31, 62R40, 68T09.

Xavier Tolsa

Rectifiability, square functions and Carleson's ε^2 conjecture

In this paper we review some classical results about rectifiability and other more recent related results, such as Jones' traveling salesman theorem or the solution of Carleson's ε^2 conjecture. To prove these results, the application of new ideas based on harmonic analysis has been essential.

Keywords: rectifiability, tangent, traveling salesman theorem, square functions, Hausdorff measures.

MSC2010 Subject Classification: 28A75, 28A78, 30C85.

Instruccions per als autors

Els articles sotmesos a publicació s'han d'enviar als editors o a qualsevol membre del comitè editorial per correu electrònic, preferentment en format PDF. Els originals han de contenir la versió anglesa del títol, un resum breu en català i en anglès, paraules clau en català i en anglès i els codis de la classificació per matèries MSC2010.

Les versions definitives dels articles acceptats s'han de presentar en codi $\text{\TeX}$, preferentment en l'estil $\text{\LaTeX}$ propi del BUTLLETÍ. Aquest estil es pot obtenir a les pàgines web de la Societat Catalana de Matemàtiques (SCM). Fem notar que en aquesta publicació s'utilitza preferentment el punt per a separar decimals, en lloc de la coma recomanada per l'IEC, per a poder facilitar la comprensió de les expressions matemàtiques. Per tal d'accelerar el procés de producció, es prega als autors que segueixin les indicacions contingudes en el document d'exemple.

La versió en paper del BUTLLETÍ s'imprimeix en blanc i negre. Quan un article contingui figures en color i es consideri convenient, l'autor proporcionarà una versió dels gràfics substituint el color per tons de grisos i línies de gruix variable. Així mateix, modificarà els comentaris que facin referència al color de les figures. En qualsevol cas, el BUTLLETÍ publicarà l'original en color en el seu format electrònic.

La propietat intel·lectual dels articles és dels respectius autors.

Els autors, en el moment de lliurar els articles al BUTLLETÍ per a sol·licitar-ne la publicació, accepten els termes següents:

- Els autors cedeixen a la SCM (filial de l'Institut d'Estudis Catalans) els drets de reproducció, comunicació pública i distribució dels articles presentats per a ser publicats al BUTLLETÍ.

- Els autors responen davant la SCM de l'autoria i l'originalitat dels articles presentats.

- És responsabilitat dels autors l'obtenció dels permisos per a la reproducció de tot el material gràfic inclòs en els articles.

- La SCM està exempta de tota responsabilitat derivada de l'eventual vulneració de drets de propietat intel·lectual per part dels autors.

Cada autor rebrà una còpia en PDF d'alta qualitat de la versió digital del seu article i un exemplar imprès del número del BUTLLETÍ en el qual es publiqui.

La correspondència administrativa relacionada amb el BUTLLETÍ s'ha d'adreçar a la SCM.

Pel que fa a la protecció de dades personals, l'Institut d'Estudis Catalans (IEC) compleix el que estableix el Reglament general de protecció de dades de la Unió Europea (Reglament 2016/679, del 27 d'abril de 2016). De conformitat amb aquesta norma, s'informa que, amb l'acceptació de les normes de publicació, els autors autoritzen que les seves dades personals (nom i cognoms, dades de contacte i dades de filiació) puguin ser publicades en el corresponent volum del BUTLLETÍ.

Aquestes dades seran incorporades a un tractament que és responsabilitat de l'IEC amb la finalitat de gestionar aquesta publicació. Únicament s'utilitzaran les dades dels autors per a gestionar la publicació del BUTLLETÍ i no seran cedides a tercers, ni es produiran transferències a tercers països o organitzacions internacionals. Un cop publicat el BUTLLETÍ, aquestes dades es conservaran com a part del registre històric d'autors. Els autors poden exercir els drets d'accés, rectificació, supressió, oposició, limitació en el tractament i portabilitat, adreçant-se per escrit a l'Institut d'Estudis Catalans (carrer del Carme, 47, 08001 Barcelona), o bé enviant un correu electrònic a l'adreça dades.personals@iec.cat, en què s'especifiqui de quina publicació es tracta.

Comitè editorial

Antoni Guillamon (editor en cap)
Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya
antoni.guillamon@upc.edu

Carme Cascante
Dep. de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona
cascante@ub.edu

Bartomeu Coll
Dep. de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears
tomeu.coll@uib.cat

Núria Fagella
Dep. de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona
fagella@maia.ub.es

Armengol Gasull
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
gasull@mat.uab.cat

Gábor Lugosi
ICREA i Departament d'Economia
Universitat Pompeu Fabra
gabor.lugosi@upf.edu

Rosa Camps (editora adjunta)
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
rcamps@mat.uab.cat

Marc Noy
Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya
marc.noy@upc.edu

Francesc Planas
Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya
francesc.planas@upc.edu

Joan Saldaña
Dep. d'Informàtica, Mat. Aplicada i Estadística
Universitat de Girona
joan.saldana@udg.edu

Marta Sanz-Solé
Dep. de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona
marta.sanz@ub.edu

Gil Solanes
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
solanes@mat.uab.cat



Societat Catalana de Matemàtiques

La **Societat Catalana de Matemàtiques (SCM)** és una societat filial de l'Institut d'Estudis Catalans, que continua les activitats de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències, que fou fundada per l'Institut l'any 1931. Les finalitats de la **SCM** són: el conreu de les ciències matemàtiques, l'extensió del seu coneixement en la societat catalana, el foment del seu ensenyament i de la seva investigació teòrica i aplicada, així com la publicació de tota mena de treballs que s'adeqüin a aquests objectius. La **SCM** desenvolupa les seves activitats en les terres de llengua i cultura catalanes. El català és, doncs, la llengua pròpia de la **SCM** i la que és usada normalment en tots els seus actes i publicacions.

La **SCM** edita les publicacions periòdiques *SCM/Notícies* i *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*. Els socis de la **SCM** reben, gratuïtament, aquestes dues publicacions.

La **SCM** té convenis de reciprocitat amb diverses societats matemàtiques d'arreu del món, mitjançant els quals els socis de la **SCM** obtenen una reducció en la quota de soci d'aquestes societats. Així mateix, els socis de la **SCM** poden fer-se socis de la Societat Matemàtica Europea pagant una quota complementària.

La Junta Directiva de la **SCM** està constituïda per les persones següents:

PRESIDENTA: Dolors Herbera i Espinal

VICEPRESIDENT: Josep Vives i Santa-Eulàlia

ADJUNT A LA VICEPRESIDÈNCIA: Abraham de la Fuente Pérez

SECRETÀRIA: Immaculada Baldomà i Barraca

TRESORER: Albert Granados i Corsellas

VOCAL EMPRESA: Aleix Ruiz de Villa

VOCAL PUBLICACIONS: Montserrat Alsina i Aubach

VOCALS: Josep Grané i Manlleu, Mireia Lopez i Beltran, Albert Ruiz i Cirera, Manel Udina i Abelló

DELEGADA DE L'IEC: Pilar Bayer i Isant

L'adreça de la **SCM** és carrer del Carme, 47, 08001 Barcelona. Telèfon: 933 248 583. Fax: 932 701 180. Correu electrònic: scm@iec.cat. Adreça web: <http://scm.iec.cat>.

El Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques publica, en llengua catalana, exposicions matemàtiques de qualitat, que puguin interessar a un nombre elevat de lectors. Es donarà prioritat a aquells treballs en què destaquin la claredat d'exposició i l'interès general del tema. El Butlletí està obert a tots els camps de la matemàtica i també als aspectes matemàtics de les ciències experimentals, la tecnologia, l'economia, etc., així com a altres àrees, com la història, la didàctica i la filosofia, sempre que els treballs tinguin un component matemàtic important. També tenen cabuda al Butlletí aquells articles que desenvolupin un aspecte significatiu de la problemàtica de la professió matemàtica al nostre país.

El Butlletí publica un volum a l'any, dividit en dos números, que es trameten gratuïtament a tots els socis. El Butlletí es publica també en format electrònic. L'edició electrònica del Butlletí pot obtenir-se des del portal de revistes científiques en línia de l'IEC o al servidor <http://scm.iec.cat>.

La correspondència administrativa s'ha d'adreçar a la Societat Catalana de Matemàtiques.

Editor en cap _____

Antoni Guillamon

Departament de Matemàtiques

Universitat Politècnica de Catalunya

Editora adjunta _____

Rosa Camps

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Comitè editorial _____

Carne Cascante

Dep. de Matemàtiques i Informàtica

Universitat de Barcelona

Marc Noy

Departament de Matemàtiques

Universitat Politècnica de Catalunya

Bartomeu Coll

Dep. de Matemàtiques i Informàtica

Universitat de les Illes Balears

Francesc Planas

Departament de Matemàtiques

Universitat Politècnica de Catalunya

Núria Fagella

Dep. de Matemàtiques i Informàtica

Universitat de Barcelona

Joan Saldaña

Dep. d'Informàtica, Mat. Aplicada i Estadística

Universitat de Girona

Armengol Gasull

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Marta Sanz-Solé

Dep. de Matemàtiques i Informàtica

Universitat de Barcelona

Gábor Lugosi

ICREA i Departament d'Economia

Universitat Pompeu Fabra

Gil Solanes

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Societat Catalana de Matemàtiques

Carrer del Carme, 47 - 08001 Barcelona

tel. 933 248 583 - fax 932 701 180

scm@iec.cat - <http://scm.iec.cat>